

「確率過程とその応用」問題解答

逆瀬川浩孝

1 確率過程

練習 1.1 $X(t)$ を来年元旦から数えて t 日目の西早稲田キャンパスでの火災発生件数としたとき、 $X(t)$ のサンプルパスを描きなさい。

略解： $X(0) = 0$ 、火災発生時点で 1 ずつ増加する階段関数。図は省略。

練習 1.2 連続時間の確率過程 $\{X(t), t \in T\}$ としてモデル化できそうな例を探し、確率変動の規則を適当に定義して、そのサンプルパスを描きなさい。

略解：省略

練習 1.3 5 試合のプレーオフ（どちらかが 3 勝したら終わり）の経過を確率過程と考えた場合、状態推移図を描きなさい。

略解： j 勝 k 敗を (j, k) と書くと、 $(0, 0)$ から $(1, 0)$ か $(0, 1)$ へ、 (j, k) から $(j+1, k)$ か $(j, k+1)$ へ、というように一方向へ推移し、 $(3, 0), (3, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 3), (0, 3)$ へ推移したところで終わりになる。引き分けは考えていない。

演習問題

問題 1.1 現実的な確率過程 $\{X(t), t \in T\}$ を定義して、状態推移図を描きなさい。また、ランダム事象を想定しながらサンプルパスを描き、どういうランダム事象が想定されているのか、説明しなさい。

略解：省略

2 確率の基礎知識

練習 2.1 A, B を事象としたとき、次の式が成り立つことを証明しなさい。

$$\begin{aligned} A \cap A^c &= \phi \\ A &= (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \\ A \cup B &= A \cup (B \cap A^c) \end{aligned}$$

略解：集合論におけるドモルガンの法則や分配法則

$$\begin{aligned} (A \cap B)^c &= A^c \cup B^c \\ (A \cup B)^c &= A^c \cap B^c \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

などを使う

$$\begin{aligned} A \cap A^c &= ((A \cap A^c)^c)^c = (A^c \cup A)^c = \Omega^c = \phi \\ A &= A \cap \Omega = A \cap (B \cup B^c) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \\ A \cup (B \cap A^c) &= (A \cup B) \cap (A^c \cup A) = (A \cup B) \cap \Omega = A \cup B \end{aligned}$$

練習 2.2 三つの事象 A, B, C が起こりうるランダム試行、すなわち A, B, C は互いに排反で $\Omega = A \cup B \cup C$ が成り立つようなものとしたとき A, B, C を含む最小の σ 集合族を決定しなさい。

略解： A, B, C を含む最小の σ 集合族を $\mathcal{F}$ とすると、

1. 仮定より $A, B, C \in \mathcal{F}$
2. 公理 1 より $\Omega \in \mathcal{F}$
3. 公理 2 より： $\phi (= \Omega^c), A^c, B^c, C^c \in \mathcal{F}$
4. 任意の事象の和事象も $\mathcal{F}$ に含まれるが、 $A \cup B \cup C = \Omega$ の関係から、これらはすべて、上の 2 あるいは 3 にすべて含まれる。

以上から、 $\mathcal{F} = \{A, B, C, A^c, B^c, C^c, \Omega, \phi\}$ 、つまり、三つの事象のあらゆる組み合わせをすべて含む集合族。

練習 2.3 次の等式を証明しなさい。

$$\begin{aligned} P(A \cap A^c) &= 0 \\ P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

略解：事象（集合）が等しいことが言えれば確率も等しい。練習 2.1 と確率の公理（排反事象の和の確率は個々の事象の確率の和になる）を使えばよい。3 番目の等式は

$$\begin{aligned} A \cup B &= A \cup (B \cap A^c) \\ B &= (B \cap A^c) \cup (B \cap A) \end{aligned}$$

と変形して、公理 3 を適用する

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A^c) = P(A) + P(B) - P(B \cap A)$$

練習 2.4 どの目の出る確率も等しいさいころを 2 回振ったときに出る目の合計を X とする。このとき、 X の確率規則を知るために適切な標本空間を定義し、その標本空間の各標本点ごとに X の値を決めなさい。その結果を参考に、 X の確率関数を計算しなさい。

略解：一回目と二回目に出る目をセットで (i, j) とした 36 個の標本点を考え、等可能性の原理を適用した確率を付与する。このとき $\omega = (i, j)$ ならば $X(\omega) = i + j$ 。また $2 \leq X \leq 12$ で、 $X = k$ となる標本点の個数は $k - 1$ ($k \leq 7$)、あるいは $13 - k$ ($k \geq 7$)。したがって、

$$P(X = i) = \frac{6 - |i - 7|}{36} \quad (i = 2, 3, \dots, 12)$$

練習 2.5 $P(A) = p$ という事象 A の定義関数を $\mathbf{1}_A$ としたとき、 $\mathbf{1}_A$ の平均と分散を計算しなさい。また、平均絶対偏差と標準偏差を計算し、大小を比較しなさい。

略解：

$$E(\mathbf{1}_A) = P(\mathbf{1}_A = 1) = P(A) = p$$

$$V(\mathbf{1}_A) = E(\mathbf{1}_A) - E(\mathbf{1}_A)^2 = p(1 - p)$$

平均絶対偏差を $D(\mathbf{1}_A)$ と記すと

$$D(\mathbf{1}_A) = E(|\mathbf{1}_A - p|) = (1 - p)p + p(1 - p) = 2p(1 - p)$$

標準偏差 $S(\mathbf{1}_A) = \sqrt{p(1 - p)}$ との違いは

$$\frac{D(\mathbf{1}_A)}{S(\mathbf{1}_A)} = 2\sqrt{p(1 - p)} \geq 1$$

を計算することによって、 $p \neq 0, 1$ ならば、平均絶対偏差が標準偏差より大きいことが分かる。

練習 2.6 密度関数が次で与えられる連続確率変数 X の平均と標準偏差、変動係数を計算しなさい。

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-ax}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

略解：

$$E(X) = \int_0^\infty xf(x)dx = [-xe^{-ax}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-ax}dx = \frac{1}{a}$$

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2f(x)dx = 2 \int_0^\infty xe^{-ax}dx = \frac{2}{a^2} \Rightarrow S(X) = \frac{1}{a}$$

$$CV(X) = \frac{S(X)}{E(X)} = 1$$

練習 2.7 密度関数が次で与えられる連続確率変数 X の n 次モーメントを計算しなさい。また平均周りの 2 次と 3 次のモーメントを計算しなさい。

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

略解：

$$E(X^n) = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

$$E((X - \mu)^2) = E(X^2) - \mu^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$E((X - \mu)^3) = E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 2\mu^3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0$$

練習 2.8 n は 1 以上の整数、 p は $0 < p < 1$ の定数としたとき、パラメータ n, p の 2 項分布の確率母関数を計算しなさい。それを微分することにより、平均や確率関数が求められることを確かめなさい。

$$f(k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, & k = 0, 1, \dots, n \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

略解：確率母関数は

$$G(z) = E(z^X) = \sum_{k=0}^n z^k \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (pz + 1 - p)^n$$

また、 $f(k)$ は

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} G(z) \Big|_{z=0} &= \frac{1}{k!} n(n-1) \cdots (n-k+1) p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

さらに平均は

$$\frac{d}{dz} G(z) \Big|_{z=1} = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np$$

練習 2.9 $a > 0$ に対して、確率関数が次の式で与えられる確率分布はポワソン分布と呼ばれます。パラメータ 1 のポワソン分布の確率母関数を求め、その平均と分散を計算しなさい。

$$f(k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

略解：確率母関数は

$$G(z) = E(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \times \frac{a^k}{k!} e^{-a} = e^{-a(1-z)}$$

$a = 1$ ならば $G(z) = e^{z-1}$ 。微分して

$$\begin{aligned} G'(z) &= G(z), G''(z) = G(z) \\ E(X) &= G'(1) = 1, \\ V(X) &= G''(1) + G'(1) - G'(1)^2 = 1 \end{aligned}$$

練習 2.10 X のモーメント母関数を $M_X(\theta)$ としたとき、 $aX + b$ のモーメント母関数は $e^{b\theta} M_X(a\theta)$ で与えられることを証明しなさい。

略解：

$$M_{aX+b}(\theta) = E(e^{(aX+b)\theta}) = E(e^{aX\theta} e^{b\theta}) = e^{b\theta} E(e^{a\theta X}) = e^{b\theta} M_X(a\theta)$$

練習 2.11 パラメータ p の幾何分布の確率母関数が $pz/(1 - (1-p)z)$ で与えられることを確かめ、それを微分することにより平均と分散を計算しなさい。

略解：確率母関数は

$$\begin{aligned} G(z) &= E(z^X) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p z^k = \frac{pz}{1 - (1-p)z} \\ &= \frac{p}{1-p} \left(\frac{1}{1 - (1-p)z} - 1 \right) \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} G'(z) &= \frac{p}{(1 - (1-p)z)^2}, G''(z) = \frac{2p(1-p)}{(1 - (1-p)z)^3} \\ E(X) &= G'(1) = \frac{1}{p}, \\ V(X) &= G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2 = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} \end{aligned}$$

練習 2.12 パラメータ λ のポワソン分布に従う確率変数 X の確率母関数を計算し、平均も分散も λ であることを確かめなさい。

略解：練習 2.9 と同じ。

練習 2.13 X が $\{1, 2, \dots, 6\}$ 上の一様分布に従うとき、その平均と分散を計算しなさい。

略解：

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3.5 \\ E(X^2) &= \frac{1}{6}(1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) = 15\frac{1}{6}, V(X) = 2\frac{11}{12} \end{aligned}$$

練習 2.14 (1)Excel あるいは R を使ってパラメータ $\mu = 0, \sigma = 1$ の正規分布の密度関数、累積分布関数のグラフを描きなさい (Excel は「NORM.DIST」、R は「dnorm, pnorm」)。(2) また、パラメータ $\mu = 4, \sigma = 4$ の正規分布のグラフを描きなさい。何が分かりますか。

略解：R のコードの例

```
curve(dnorm(x), -3, 3) # 標準正規分布は m, sd 指定が不要
win.graph() # 新しいウィンドウに表示
curve(pnorm(x), -3, 3)
win.graph()
curve(dnorm(x, 4, 4), -8, 16)
```

表示される二つのグラフは、縦軸の目盛りが異なるが、重なる。基準化すると同一の確率規則に従う

練習 2.15 パラメータ λ の指数分布のモーメント母関数を計算し、その平均、分散がそれぞれ $\lambda^{-1}, \lambda^{-2}$ であることを確かめなさい。

略解：練習 2.6 参照。モーメント母関数は

$$M(z) = \int_0^{\infty} e^{zx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - z}$$

したがって、

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2} \Rightarrow V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

練習 2.16 (1)Excel あるいは R を使ってパラメータ $\lambda = 1$ の指数分布のグラフを $[0, 3]$ の範囲で描きなさい (Excel は「EXPONDIST」、R は「dexp」)。(2) また、同じグラフを $[5, 8]$ の範囲で描きなさい。何が分かりますか。

略解：R のコードの例

```
curve(dexp(x), 0, 3) # 平均 1 の場合は指定不要
```

```
win.graph() # 新しいウィンドウに表示
curve(dexp(x), 5, 8)
```

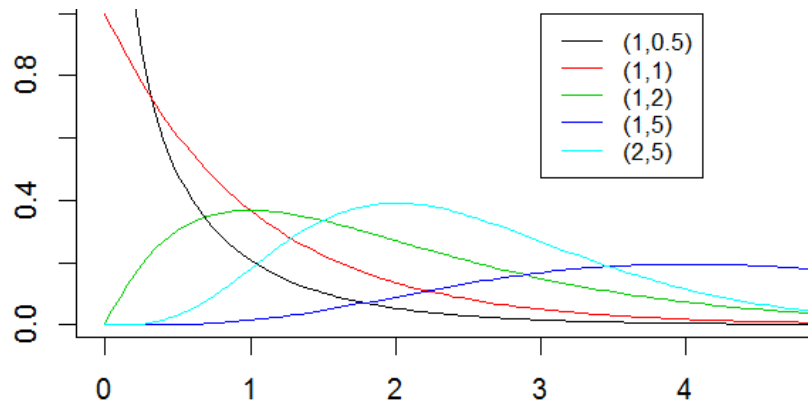
表示される二つのグラフは、縦軸の目盛りは異なるが重なる。 $X > 5$ という条件を付けた確率分布が同じになる（無記憶性）

練習 2.17 Excel あるいは R を使って $(a, b) = (1, 0.5), (1, 1), (1, 2), (1, 5), (1, 10), (2, 5)$ のガンマ分布の密度関数を描きなさい（Excel は「GAMMADIST」、R は「dgamma」）。

略解：R のコードの例

```
curve(dgamma(x, 0.5, 1), xlim=c(0, 5), ylim=c(0, 1))
curve(dgamma(x, 1, 1), add=T, col=2)
curve(dgamma(x, 2, 1), add=T, col=3)
curve(dgamma(x, 5, 1), add=T, col=4)
curve(dgamma(x, 5, 2), add=T, col=5)
```

その結果。



練習 2.18 区間 $[0, 1]$ 上で連続一様分布する確率変数 X の平均、分散を求めなさい。区間 $[a, b]$ 上で連続一様分布する確率変数を Y としたとき、 X と Y の関係式を求め、それを使って Y の平均、分散を計算しなさい。

略解： X の平均分散については練習 2.7 参照。 $Y = (b - a)X + a$ なので、

$$E(Y) = (b - a)E(X) + a \frac{b - a}{2} + a = \frac{a + b}{2}$$

$$V(Y) = (b - a)^2 V(X) = \frac{(b - a)^2}{12}$$

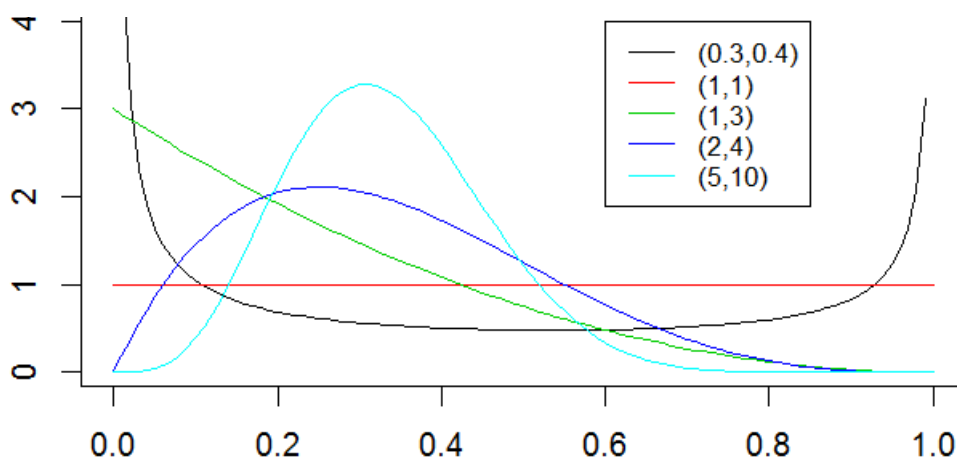
練習 2.19 Excel あるいは R を使って $(p, q) = (0.3, 0.4), (1, 1), (1, 3), (2, 4), (5, 10)$ のベータ分布の密度関数を描きなさい（Excel は「BETADIST」、R は「dbeta」）。

略解：R のコードの例：

```
curve(dbeta(x, 0.3, 0.4), 0, 1, ylim=c(0, 4))
curve(dbeta(x, 1, 1), add=T, col=2)
curve(dbeta(x, 1, 3), add=T, col=3)
```

```
curve(dbeta(x,2,4), add=T,col=4)
curve(dbeta(x,5,10), add=T,col=5)
```

「c(0,1)」は計算する範囲(区間)、「xlim=c(0,1)」はグラフを表示させる範囲を指定している。
その結果。



練習 2.20 $\log Y$ がパラメータ μ, σ^2 の正規分布に従うことを使って、 Y の累積分布関数、密度関数が次のように与えられることを確かめなさい。

$$P(Y \leq y) = P(X \leq \log y) = \int_{-\infty}^{\log y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y} \exp\left(-\frac{(\log y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

略解： $Y = e^X$ の対数を取って考える

$$P(Y \leq y) = P(X \leq \log y) = \int_{-\infty}^{\log y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx$$

$P(Y \leq y)$ の y に関する微分は

$$\frac{d}{dy} \int_{-\infty}^{\log y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx = \frac{d}{dy} \log y \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(\log y - \mu)^2/2\sigma^2}$$

練習 2.21 パラメータ μ, σ^2 の対数正規分布の平均、分散がそれぞれ

$$e^{\mu+\sigma^2/2}, e^{2\mu+\sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$$

であることを確かめなさい。

略解：定義通り、変数変換を利用して

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(\log y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) dy \\
 &= \int_{-\infty}^\infty \frac{e^u}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(u - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) du \\
 &= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(u - \mu - \sigma^2)^2}{2\sigma^2} + \frac{\sigma^4 + 2\mu\sigma^2}{2\sigma^2}\right) du \\
 &= \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(Y^2) &= \int_0^\infty \frac{y}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(\log y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) dy \\
 &= \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{2u}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(u - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) du \\
 &= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(u - \mu - 2\sigma^2)^2}{2\sigma^2} + \frac{4\sigma^4 + 4\mu\sigma^2}{2\sigma^2}\right) du \\
 &= \exp(2\mu + 2\sigma^2)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V(Y) = \exp(2\mu + 2\sigma^2) - \exp(2\mu + \sigma^2) = \exp(2\mu + \sigma^2) (e^{\sigma^2} - 1)$$

練習 2.22 Excel あるいは R を使ってパラメータ $\mu = 0, \sigma = 1$ の対数正規分布の平均、分散を計算し、グラフを描きなさい (Excel は「LOGNORM.DIST」、R は「dlnorm」)。

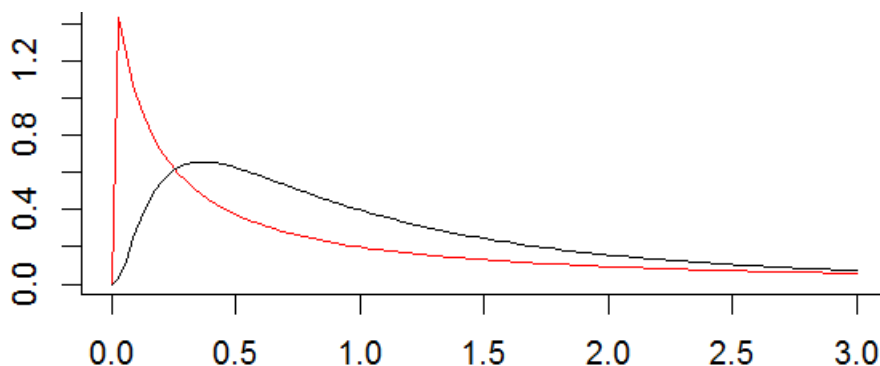
略解：

```
ex = 0; sg = 1
c(exp(ex+sg^2/2), exp(2*ex+sg^2)*(exp(sg^2)-1))
```

によって、平均と標準偏差が表示される。結果は「1.65 4.67」、分散は 21.82。グラフを描くコードは以下の通り。

```
curve(dlnorm(x,ex,sg), 0,3)
```

その結果。黒い線が答え、赤い線は $\sigma = 2$ とした場合。



練習 2.23 これらの式が成り立つことを証明しなさい。

$$P_H(A \cap A^c) = 0 \quad \text{あるいは} \quad P(A \cap A^c | H) = 0$$

$$P_H(A) = P_H(A \cap B) + P_H(A \cap B^c)$$

$$P_H(A \cup B) = P_H(A) + P_H(B) - P_H(A \cap B)$$

略解：事象 A, B をすべて事象「 $A \cap H$ 」「 $B \cap H$ 」に、 P_H を P に置き換えたものは成立しているので、その等式を $P(H)$ で割れば、上の式が得られる。たとえば、

$$\begin{aligned} P(A \cap H) &= P(A \cap H \cap B \cap H) + P(A \cap H \cap (B \cap H)^c) \\ &= P(A \cap B \cap H) + P(A \cap B^c \cap H \cup A \cap H \cap H^c) \\ &= P(A \cap B \cap H) + P(A \cap B^c \cap H) \\ &\Rightarrow \frac{P(A \cap H)}{P(H)} = \frac{P(A \cap B \cap H)}{P(H)} + \frac{P(A \cap B^c \cap H)}{P(H)} \end{aligned}$$

練習 2.24 確率変数の和の期待値は各変数の期待値の和に等しいことを証明しなさい。

略解：確率変数 X, Y の結合密度関数を $f(x, y)$ 、周辺密度関数をそれぞれ $f_X(x), f_Y(y)$ とすると、

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x + y) f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dx dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \\ &= E(X) + E(Y) \end{aligned}$$

練習 2.25 $X_1, X_2, \dots$ は次の確率関数を持つ互いに独立な確率変数とする。

$$f(x) = p^x (1 - p)^{1-x}, \quad x = 0, 1$$

このとき、 $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ の分布を合成積を使って計算しなさい（数学的帰納法）。また、モーメント母関数を使って計算しなさい。

略解：合成積による解法： $X_1 + X_2$ の確率関数は

$$P(X_1 + X_2 = 0) = P(X_1 = 0, X_2 = 0) = (1 - p)^2$$

$$P(X_1 + X_2 = 1) = \sum_{i=0}^1 P(X_1 = i) P(X_2 = 1 - i) = 2p(1 - p)$$

$$P(X_1 + X_2 = 2) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) = p^2$$

$X_1 + X_2 + \dots + X_n$ はパラメータ n, p の 2 項分布に従うものと仮定すると

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 + \dots + X_{n+1} = k) &= P(X_1 + X_2 + \dots + X_n = k, X_{n+1} = 0) \\ &\quad + P(X_1 + X_2 + \dots + X_n = k - 1, X_{n+1} = 1) \\ &= (1 - p) \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} + p \binom{n}{k-1} p^{k-1} (1 - p)^{n-k+1} \\ &= \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) p^k (1 - p)^{n-k+1} \\ &= \binom{n+1}{k} p^k (1 - p)^{n+1-k} \end{aligned}$$

モーメント母関数による解法： X_i のモーメント母関数は

$$M_X(\theta) = E(e^{\theta X}) = 1 - p + pe^{\theta}$$

したがって、 $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ のモーメント母関数は

$$M_Z(\theta) = (1 - p + pe^{\theta})^n$$

一方、パラメータ n, p の 2 項分布のモーメント母関数は

$$M(\theta) = \sum_{k=0}^n e^{k\theta} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (1 - p + pe^{\theta})^n$$

したがって、モーメント母関数の性質により、 Z はパラメータ n, p の 2 項分布に従う。

練習 2.26 相関係数が 1 になるのは二つの確率変数がどのような関係にある場合か。−1 の場合どうか。

略解：任意の z と二つの確率変数 X, Y に対して

$$V(zX + Y) = V(X)z^2 + 2C(X, Y)z + V(Y) \geq 0$$

これを z の二次関数と考えると、非負条件から

$$D = C(X, Y)^2 - V(X)V(Y) = V(X)V(Y)(\rho^2 - 1) \leq 0$$

したがって、 $\rho = \pm 1$ ならば、重解で、 $V(zX + Y) = 0$ 。つまり、 $zX + Y$ は定数。 $Y = aX + c$ とすると、

$$C(X, Y) = aV(X), \sqrt{V(Y)} = |a| \sqrt{V(X)}$$

したがって、 $a > 0$ ならば X, aX の相関係数は 1、 $a < 0$ ならば X, aX の相関係数は −1。

練習 2.27 確率変数の分散を条件付き期待値を利用して計算する次の式が成り立つことを証明しなさい。(ヒント： $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ として、条件付き期待値の式 ($E(X) = E(E(X | Y))$) を繰り返し使う)

$$V(X) = E(V(X | Y)) + V(E(X | Y))$$

略解：

$$\begin{aligned} E(X^2) &= E(E(X^2 | Y)) = E(E(X^2 | Y)) - E(E(X | Y)^2) + E(E(X | Y)^2) \\ &= E(V(X | Y)) + E(E(X | Y)^2) \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = E(V(X | Y)) + E(E(X | Y)^2) - (E(E(X | Y)))^2 \\ &= E(V(X | Y)) + V(E(X | Y)) \end{aligned}$$

練習 2.28 X, Y が次のような 2 変量正規分布に従うとき、(1) X の周辺分布は平均 μ_X 、分散 σ_X^2 の正規分布になることを確かめなさい。(2) X, Y の相関係数が ρ になることを確かめなさい。(3) $Y = y$ という条件の下で、 X は平均 $\mu_X + \rho\sigma_X(y - \mu_Y)/\sigma_Y$ 、分散 $\sigma_X^2(1 - \rho^2)$ の正規分布になることを示しなさい。

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\eta(x, y)\right) \quad (-\infty < x, y < \infty) \\ \eta(x, y) &= \left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y - \mu_Y}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{y - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 \end{aligned}$$

略解：(1)

$$\frac{1}{(1-\rho^2)}\eta(x,y) = \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} - \rho \frac{x-\mu_X}{\sigma_X\sqrt{1-\rho^2}} \right)^2 + \left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X} \right)^2$$

したがって、

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right) \\ \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} - \rho \frac{x-\mu_X}{\sigma_X\sqrt{1-\rho^2}}\right)^2\right)$$

これを y について積分すれば、平均 μ_X 、分散 σ_X^2 の正規分布の密度関数が得られる。

(2) (1) の変形を利用して

$$E(XY | X = x) = \left(\mu_Y + \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X) \right) x$$

となる。条件を外せば

$$E(XY) = \mu_X\mu_Y + \rho\sigma_X\sigma_Y$$

したがって、

$$R(X,Y) = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \rho$$

(3) (1) の X, Y を入れ替えれば、

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X\sqrt{1-\rho^2}} - \rho \frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\right)^2\right) \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\left(\sigma_X\sqrt{1-\rho^2}\right)^2}\left(x - \mu_X - \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y)\right)^2\right)$$

これは、平均 $\mu_X + \rho\sigma_X(y - \mu_Y)/\sigma_Y$ 、分散 $\sigma_X^2(1 - \rho^2)$ の正規分布の密度関数。

練習 2.29 上の練習問題の結果を利用して、Excel あるいは R で関連のある 2 変量正規分布に従う乱数を生成し、その散布図を描いて検証しなさい。(ヒント：Excel では、平均、標準偏差が μ_Y, σ_Y の正規乱数は「=NORMINV(RAND(), μ_Y, σ_Y)」で生成できる。その生成された乱数を y としたとき、平均 $\mu_X + \rho\sigma_X(y - \mu_Y)/\sigma_Y$ 、標準偏差 $\sigma_X\sqrt{1-\rho^2}$ の正規乱数を x とすると、 (x, y) が相関 ρ を持つ 2 変量正規乱数になる。R ならば、標準正規乱数は $y=rnorm(n)$ によって生成され、 $x=rnorm(n, y*r, sqrt(1-r^2))$ とすれば、 (x, y) は相関係数 r の 2 変量 (標準) 正規乱数となる。 ρ の値を $[-1, 1]$ の範囲で動かして、散布図を描き、形状の変化を観察しなさい)

略解：R のコードの例：

```
n = 200; mx = 10; sx = 3; my = 20; sy = 5; r = -0.8
y = rnorm(n, my, sy)
x = rnorm(n, mx + r*sx/sy * (y - my), sx*sqrt(1-r^2))
plot(x,y)
c(mean(x), sd(x), mean(y), sd(y), cor(x,y))
```

練習 2.30 Excel あるいは R を使ってコイン投げの実験を繰り返し、大数の法則を実感しなさい。具体的には、平均を取る実験の回数を 100 回、1000 回、10000 回と増やし、その標本平均のばらつきがだんだんと小さくなることを確かめなさい。実現確率をきちんと計算すると、ドモアブル・ラプラスの定理の検証にもなる（R ならば `mean(sample(2,10000,replace=T))-1` で 10000 回コイン投げの実験が出来る、速い）。

略解：R のコードの例：

```
for(n in c(100,1000,10000,100000,1000000)) {
  z = sample(0:1,n,replace=T)
  cat(n, mean(z), sd(z)/sqrt(n), "\n") # cat は表示用の関数
}
```

練習 2.31 Excel あるいは R を使って一様乱数を n 個生成し、その標本平均と 0.5 の差の絶対値が $1/\sqrt{12n}$ 以下になる相対度数を計算しなさい。その結果と中心極限定理の主張を比較しなさい。具体的には、 $n = 100, 1000, 10000$ などとして、一様乱数を n 個生成し、その標本平均が $0.5 - 1/\sqrt{12n}$ 以下になれば 1、さもなければ 0 というデータを 1 回の実験データとし、（Excel ならば）再計算キーを押してデータを集め、相対度数を計算してその数値を中心極限定理で主張されている数値と比較してみる。

略解：「その標本平均が $0.5 - 1/\sqrt{12n}$ 以下になれば」は「その標本平均と 0.5 の差の絶対値が $1/\sqrt{12n}$ 以下になれば」の間違い。

1 回の実験結果を表示させる R のコードの例：

```
n = 100; abs(mean(runif(n))-0.5) < 1/sqrt(12*n)
```

この実験を m 回繰り返すためには「sapply」関数を使う。その例：

```
n=100; m=100
check = function(x){abs(mean(runif(n))-0.5) < 1/sqrt(12*n)}
mean(sapply(1:m, check))
```

理論値は、標準正規分布の分布関数を $\Phi(x)$ として、 $\Phi(1) - \Phi(-1) = 0.68$ （R では $\Phi(x)$ を `pnorm()` 関数で表すので、R で「`pnorm(1)-pnorm(-1)`」と入力すれば表示される）

演習問題

問題 2.1 パラメータ n, p の 2 項分布に従う確率変数を X 、それとは独立にパラメータ m, p の 2 項分布に従う確率変数を Y としたとき、 $X + Y$ はパラメータ $n + m, p$ の 2 項分布になることを、確率母関数を使って証明しなさい。ベルヌイ試行と 2 項分布の関係を利用して、この命題が成り立つ直感的な説明を与えなさい。

略解：

$$G_X(z) = (1 - p + pz)^n, G_Y(z) = (1 - p + pz)^m$$

なので、 X, Y が互いに独立であることを利用すると、

$$G_{X+Y}(z) = E(z^{(X+Y)z}) = E(z^{Xz})E(z^{Yz}) = G_X(z)G_Y(z) = (1 - p + pz)^{n+m}$$

これは $X + Y$ がパラメータ $n + m, p$ の 2 項分布に従うことを意味する。

問題 2.2 大相撲で三力士が同じ勝ち星で 15 日間を終えると、巴戦で優勝を決める。巴戦とは勝

ち残りで 2 人ずつ対戦し、最初に 2 連勝した力士を優勝とする方式です。最初に対戦して勝った力士、負けた力士、最初は控えに回った力士のそれぞれの優勝確率を計算しなさい。ただし、どの勝負も勝つ確率は五分五分とします。

略解：次の勝負で優勝が決まるという事象を D とする。最初に勝った力士が優勝するという事象を A とすると、

$$P(A) = P(A, D) + P(A, D^c) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} P(A)$$

が成り立つ。したがって、

$$P(A) = \frac{4}{7}$$

最初に控えの力士が優勝するという事象を B とすると、とりあえず勝ち残りの力士に勝たなければいけないので、 D はあり得ない、勝ち残ると、後は事象 A と同じ、ということから

$$P(B) = P(B, D) + P(B, D^c) = 0 + \frac{1}{2} P(A) \Rightarrow P(B) = \frac{2}{7}$$

最初に負けた力士が逆転優勝するチャンスは、誰かが優勝することから、残りの 7 分の 1。

問題 2.3 さいころ二つを使つての賭け。最初に振って和が 2 か 3 か 12 ならば負け、7 か 11 ならば勝ち。4 ならば和が 4 か 7 になるまで振り直し、最後に 4 が出たら勝ち、7 が出たら負け。5, 6, 8, 9, 10 の場合は 4 と同じように、最初に出た目か 7 が出るまで振り続け、最後に 7 が出たら負け、さもなければ勝ち。という賭の勝つ確率を計算しなさい。

略解：最初に 4 が出た場合に勝つ確率は 7 が出る前に 4 が出る確率なので $3/(3+6)$ に等しい。5, 6, 8, 9, 10 の場合も同様に考えれば、最初に出る目の数で条件を付ければ計算出来る。勝つという事象を A 、最初に出る目の数を X とすると、

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=2}^{12} P(A, X=k) = \sum_{k=2}^{12} P(A | X=k) P(X=k) \\ &= \frac{8}{36} + 2 \left(\frac{3}{36} \frac{3}{9} + \frac{4}{36} \frac{4}{10} + \frac{5}{36} \frac{5}{11} \right) = \frac{244}{495} \approx 0.493 \end{aligned}$$

負ける可能性の方が若干大きい。これはアメリカで有名な CRAPS というゲーム、うまくできている。

問題 2.4 相関係数がプラスマイナス 1 の範囲にあることを証明しなさい。

(ヒント) $uX + Y$ の分散を u の 2 次関数と思って、何か考えなさい。

略解：ヒントに従う

$$V(uX + Y) = V(X)u^2 + 2C(X, Y)u + V(Y) \geq 0$$

これがどんな u に対しても恒等的に成り立つためには判別式が非正でなければいけない。

$$C(X, Y)^2 - V(X)V(Y) \leq 0 \iff -1 \leq \frac{C(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} \leq 1$$

問題 2.5 確率変数 X, Y は互いに独立にパラメータ λ の指数分布に従うとき、 $X + Y = z$ という条件の下で X の条件付き密度関数を求めなさい。その結果から、指数分布の性質について論じなさい。

略解：

$$P(x < X \leq x + dx \mid X + Y = z) = \frac{\lambda e^{-\lambda x} \times \lambda e^{-\lambda(z-x)} dx}{\lambda^2 z e^{-\lambda z}} = \frac{1}{z} dx$$

これは区間 $[0, z]$ での一様分布に従うことを意味する。二つの合計が分かっても、その内訳に関する情報は皆無。

問題 2.6 パラメータ λ_k の指数分布に従う確率変数 X_k に対して、 $X_1, X_2, \dots, X_n$ の最小値を Y とする。また、その最小値となる番号を J とする。このとき、 Y と J は互いに独立であることを示し、それぞれの確率規則を調べなさい。

略解：指数分布の性質から、 Y はパラメータ $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ の指数分布に従い、 J は $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ に比例した値を取る。

$$P(Y \geq y) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)y}, P(J = j) = \frac{\lambda_j}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}$$

$$\begin{aligned} P(Y \geq y, J = j) &= \int_y^\infty \left(\int_{x_j}^\infty \dots \int_{x_j}^\infty \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n e^{-\lambda_1 x_1} e^{-\lambda_2 x_2} \dots e^{-\lambda_n x_n} dx_1 dx_2 \dots dx_n \right) dx_j \\ &= \int_y^\infty \lambda_j e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)x_j} dx_j \\ &= \frac{\lambda_j}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)y} \end{aligned}$$

したがって、

$$P(Y \geq y \mid J = j) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)y} = P(Y \geq y)$$

問題 2.7 $X_1, X_2, \dots$ は互いに独立でパラメータ λ の指数分布に従うものとします。また N はパラメータ p の幾何分布に従うものとします。このとき、 $X_1 + X_2 + \dots + X_N$ はどういう分布になりますか。

(ヒント) モーメント母関数を使って、条件付き期待値の公式を適用しなさい。

略解： $X_1, X_2, \dots$ のモーメント母関数は $\lambda/(\lambda - \theta)$

$$\begin{aligned} M(\theta) &= E\left(e^{\theta(X_1 + X_2 + \dots + X_N)}\right) = E\left(E\left(e^{\theta(X_1 + X_2 + \dots + X_N)} \mid N\right)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} \left(E\left(e^{\theta X}\right)\right)^n = \frac{pE\left(e^{\theta X}\right)}{1 - (1-p)E\left(e^{\theta X}\right)} \\ &= \frac{\lambda p}{\lambda - \theta - (1-p)\lambda} = \frac{\lambda p}{\lambda p - \theta} \end{aligned}$$

これは $X_1 + X_2 + \dots + X_N$ がパラメータ λp の指数分布に従うことを意味する。

問題 2.8 ある工場の機械管理者の話。機械のある部品は故障した場合、すぐに新品と取り替えることにしていた。しかし、ある程度使った部品は壊れていなくても強制的に取り替えることによって、管理が容易になり、コストも抑えられるのではないかと考えた。つまり、取り付けから t 経過した部品は壊れていなくても強制的に取り替える。その場合のコスト B は、故障による取り替えのコスト A より、少なくともすむという。この取り替え方法が良いか悪いか、数量的な評価をしたい。部品の寿命を X 、その密度関数を $f(x)$ とする。二つの確率変数 Z, W を下のよう

$$Z = \min\{t, X\}, W = \begin{cases} A, & Z < t \text{ の場合} \\ B, & Z = t \text{ の場合} \end{cases}$$

このとき、以下の問に答えなさい。

(1) Z は何を表す確率変数ですか。言葉で説明しなさい。

(2) W は何を表す確率変数ですか。言葉で説明しなさい。

(3) Z の期待値を計算しなさい。

(4) W の期待値を計算しなさい。

(5) X がパラメータ λ の指数分布に従うとしたとき、 $E(W)/E(Z)$ を最小にする t の値を求めなさい。そして、なぜそれが最小になるのか、その意味を考えなさい。

略解：(1) 部品の使用期間

(2) 部品交換の際のコスト

(3)

$$P(Z \leq z) = \begin{cases} F_X(z), & Z < t \text{ の場合} \\ 1, & Z \geq t \text{ の場合} \end{cases} \Rightarrow E(Z) = \int_0^t z f_X(z) dz + t(1 - F_X(t))$$

(4)

$$E(W) = A \times F_X(t) + B \times (1 - F_X(t))$$

(5) $F_X = 1 - e^{-\lambda t}$ のとき、

$$E(Z) = \int_0^t \lambda z e^{-\lambda z} dz + t e^{-\lambda t} = \int_0^t e^{-\lambda z} dz = \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t})$$

$$E(W) = A(1 - e^{-\lambda t}) + B e^{-\lambda t}$$

従って、 $E(W)/E(Z)$ の最適化問題は微分で計算することが出来る。

$$\lambda \frac{d}{dt} \frac{A + (B - A)e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda t}} = -\frac{\lambda^2 B e^{-\lambda t}}{(1 - e^{-\lambda t})^2} = 0$$

は $[0, \infty)$ で解を持たない。 $E(W)/W(Z)$ は単調減少関数なので、最適解は $t = \infty$ 、つまり、予防取り替えをしない方が経済的（無記憶性があるので、いつも新品同様、したがって、取り替えても取り替えなくても寿命は同じ、それならば費用をかけて取り替える必要はない）。その場合の、単位時間あたりのコストは言うまでもなく、 λA 。

問題 2.9 (1) X はパラメータ n, p の 2 項分布に従い、 Y は $X = m$ のときパラメータ m, r の 2 項分布に従うという。このとき、 $Y = k$ となる確率を計算しなさい。

(2) X はパラメータ a のポワソン分布に従い、 Y は $X = m$ のときパラメータ m, r の 2 項分布に従うという。このとき、 $Y = k$ となる確率を計算しなさい。

(3) $np = a$ として $n \rightarrow \infty$ としたとき、(1) と (2) の結果を比較せよ。

略解：(1) X に対して条件を付けて計算すれば良い。

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \sum_{m=k}^n P(Y = k | X = m) P(X = m) = \sum_{m=k}^n \binom{m}{k} r^k (1-r)^{m-k} \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \\ &= \frac{(pr)^k}{k!} \sum_{m=k}^n \frac{n!}{(m-k)!(n-m)!} (p(1-r))^{m-k} (1-p)^{n-m} \\ &= \frac{(pr)^k}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} (p(1-r) + 1-p)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} (pr)^k (1-pr)^{n-k} \end{aligned}$$

従って、 Y はパラメータ n, pr の 2 項分布に従う。

(2) 同様に、

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \sum_{m=k}^{\infty} P(Y = k \mid X = m)P(X = m) = \sum_{m=k}^{\infty} \binom{m}{k} r^k (1-r)^{m-k} \frac{a^m}{m!} e^{-a} \\ &= \frac{(ar)^k}{k!} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{1}{(m-k)!} (a(1-r))^{m-k} e^{-a} \\ &= \frac{(ar)^k}{k!} e^{-ar} \end{aligned}$$

これは、 Y がパラメータ ar のポワソン分布に従うことを意味する。

(3) 2 項分布の確率を $a = np$ という関係を使って書き換えておく

$$\binom{n}{k} (pr)^k (1-pr)^{n-k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{ar}{n}\right)^k \left(1 - \frac{ar}{n}\right)^{-k} \left(1 - \frac{ar}{n}\right)^n$$

ここで $n \rightarrow \infty$ とすると、

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \rightarrow 1, \quad \left(1 - \frac{ar}{n}\right)^{-k} \rightarrow 1, \quad \left(1 - \frac{ar}{n}\right)^n \rightarrow e^{-ar}$$

となることから、

$$\binom{n}{k} (pr)^k (1-pr)^{n-k} \rightarrow \frac{(ar)^k}{k!} e^{-ar}$$

となり、(1) から (2) を導くことができる。

3 ポワソン過程

練習 3.1 S_n がパラメータ n, p の 2 項分布に従うことを証明しなさい (数学的帰納法を使う)。

略解： n 回目の推移に対して全確率の公式を使う。

$$\begin{aligned} P(S_n = k) &= P(S_{n-1} + X_n = k) = (1-p)P(S_{n-1} = k) + pP(S_{n-1} = k-1) \\ &= (1-p) \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-k-1} + p \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

練習 3.2 $S_n = i, S_{n+m} = k$ となる結合確率を計算しなさい、ただし $m > 0, k > i$ とする

略解：条件付き確率の定義

$$\begin{aligned} P(S_n = i, S_{n+m} = k) &= P(S_{n+m} = k | S_n = i) P(S_n = i) \\ &= P(S_m = k-i) P(S_n = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{m}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{m-k+i} \\ &= \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} p^k (1-p)^{n+m-k} \end{aligned}$$

$S_{n+m} = S_n + S_m$ ではない。

練習 3.2a $\{S_n\}$ はパラメータ p の 2 項過程に従うものとします。 $n > 0, m > 0, 0 \leq j \leq k$ を満たす n, m, j, k に対して、 $P(S_{n+m} = k | S_m = j)$ を計算しなさい。この結果から何が分かりますか。

略解：将来の推移は過去の実績とは無関係

$$\begin{aligned} P(S_{n+m} = k | S_m = j) &= P(X_{m+1} + \cdots + X_{n+m} = k-j) \\ &= P(S_n = k-j) \end{aligned}$$

したがって、 $R_n = S_{n+m} - S_m$ はパラメータ p の 2 項過程になる。つまり、時点 m で再生する。

練習 3.3 A4 用紙 30 枚の資料を作るのに 6 万回キーボード入力が必要であった。出来上がった資料に 20 箇所のミスタイプが発見されたとしよう。一つのミスタイプは 1 回のミスタイプが原因であるとして、ミスタイプする確率をいくつくらいに見積もればよいですか。最初の 10 ページに一つもミスタイプがない確率は 3 分の 1 より大きいですが、小さいですか。

略解：どんな文字でも、いつタイプしても 1 文字をミスタイプする確率は常に一定、という仮定を置くと、ミスタイプの起きる確率規則はミスタイプを成功と考えてベルヌイ試行でモデル化できる。ミスタイプの確率は相対度数の $20/60000 = 1/3000$ としてよい (最尤推定量)。この確率はあまりにも小さいので、ミスタイプの累積過程をポワソン過程で近似しても良い。このとき、事象の一樣性から、最初の 10 ページに一つもミスタイプがないということは、20 回さいころを振って一度も 1 と 2 がでなかったことと同じ。したがって、 $(2/3)^{20} = 3 \times 10^{-4}$ 。

練習 3.4 確率変数 Y がパラメータ λ の指数分布に従っているとき、 Y は無記憶性を持つことを確かめなさい。

略解：

$$P(Y > s + t \mid Y > s) = \frac{P(Y > s + t)}{P(Y > s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(Y > t)$$

練習 3.5 ある銀行の融資窓口には 30 分に 1 人の割合で客が到着する。客の到着がポワソン過程に従っているとして、(1)9 時から 12 時までに客が一人も来ない確率はいくつですか。(2) 正午を過ぎて初めての客が来るまでの平均時間はどれくらいですか。

略解：(1) パラメータ 2 のポワソン過程を当てはめると、求めたいものは $e^{-2 \times 3} = e^{-6} = 2.4788 \times 10^{-3}$ 。

(2)30 分

練習 3.6 客が店にパラメータ 2 のポワソン過程に従って到着する、30 分間にちょうど 1 人の客が到着する確率はいくつか

略解：パラメータの単位時間が書いていない。1 時間あたり 2 人、と仮定すると、 $P(N(0.5) = 1)$ を求める問題

$$(2 \times 0.5)e^{-2 \times 0.5} = 0.368$$

練習 3.7 MD 付きラジオは、ラジオの寿命が平均 5 万時間、MD の寿命が平均 2 万時間で、いずれも指数分布に従っているものとする。MD が原因で故障する割合はどれくらいですか。

略解：パラメータ λ, μ にしたがう確率変数を X, Y としたとき、 $P(X > Y)$ はいくつですか、という問題。離散で考えれば、非常に小さい $h > 0$ を使って、確率 $h/50000$ のベルヌイ試行と確率 $h/20000$ のベルヌイ試行を同時に実施したとき、後者の試行が先に成功する確率はいくつかという問題と考えて良い。微小な確率ならば、同時に成功することは考えなくて良いので、簡易計算法が成り立つ、つまり、確率の比、 $5/(2+5)$ 。

練習 3.8 2 人の係員のいる郵便局に A, B, C の 3 人が同時に入ってきた。 A, B が先にサービスを受けて C が待っている。サービス時間が次の場合に、 C が最後に退去することになる確率を求めなさい。(1) どの人もきっちり 3 分という場合、(2) どの人も、1 分、3 分、5 分の確率がそれぞれ $1/3$ ずつという離散分布にしたがっている場合、(3) 平均 3 分の指数分布の場合。

略解：最初の客が退去した時点から考え始めればよい。(1) は「明らか」に確率 1。(2) A, B のサービス時間の組み合わせ 9 通りのうち、サービス時間の等しい場合（その確率は 3 分の 1）は「明らかに」 C は最後。サービス時間が違う場合、先に退去する人は A, B どちらでも良く、残された客の残りサービス時間が 2 分の場合（その確率は 9 分の 4）と、残りサービス時間が 4 分の場合（その確率は 9 分の 2）に分けて考えればよい。前者の場合、 C が最後になる確率は 3 分の 2、後者の場合は 3 分の 1、したがって、 C が最後になる確率は

$$\frac{1}{3} + \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{19}{27}$$

。答えはこれを 1 から引いたもので、 $\frac{8}{27}$ 。(3) 指数分布の無記憶性から 2 分の 1。

練習 3.9 (続) 要求サービス量は同じだが、係員の能力に差があって、二つの窓口のサービス時間はそれぞれ平均 2 分、3 分の指数分布に従うものとしたとき、 A, B が C よりも先にサービスを終える確率を求めなさい。

略解： A が平均 2 分のサービス窓口でサービスされるものとする。 A が先に退去するということ

を $A < B$ のように表す。求めたいものは $P(C > B, C > A)$ 。全確率の公式から、

$$\begin{aligned} P(C > B, C > A) &= P(C > B, C > A, A > B) + P(C > B, C > A, A < B) \\ &= P(C > A, A > B) + P(C > B, A < B) \\ &= P(C > A | A > B)P(A > B) + P(C > B | A < B)P(A < B) \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{25} \end{aligned}$$

練習 3.9a $\{N(t), t \geq 0\}$ をパラメータ λ のポワソン過程とすると、 $\{N(t+s) - N(s), t \geq 0\}$ も同じパラメータ λ のポワソン過程になることを示しなさい。

(ヒント) 何を言えば示したことになりますか。定義をよく読み返しなさい。

略解: $M(t) = N(t+s) - N(s)$ とすると、(1) $M(0) = 0$ 、(2) $N(t)$ が独立増分性を持つので、 $M(t)$ も継承する、(3) $M(t+r) - M(r) = N(t+r+s) - N(r+s)$ は、 $N(t)$ の定義から、パラメータ λt のポワソン分布に従う、証明終わり

練習 3.10 ポワソン過程で最初の事象が到着する時刻を T_1 とすると、以下の式が成り立つことを示しなさい。どういう意味がありますか。

$$P(T_1 < x | N(t) = 1) = \frac{x}{t}$$

(ヒント) $(N(t) = 1) \Leftrightarrow (T_1 \leq t < T_1 + T_2)$ を使って計算する。

略解:

$$\begin{aligned} P(T_1 < x | N(t) = 1) &= \frac{P(T_1 < x, N(t) = 1)}{P(N(t) = 1)} \\ &= \frac{1}{P(N(t) = 1)} \int_0^t P(T_1 < x, N(t) = 1 | T_1 = s) \lambda e^{-\lambda s} ds \\ &= \frac{1}{\lambda t e^{-\lambda t}} \int_0^x P(N(t-s) = 0) \lambda e^{-\lambda s} ds \\ &= \frac{1}{\lambda t e^{-\lambda t}} \int_0^x e^{-\lambda(t-s)} \lambda e^{-\lambda s} ds = \frac{x}{t} \end{aligned}$$

離散化して考えると、高速のコイン投げを n 回やって、1 回だけ表が出たというとき、それは何回目でしたか、という問題ですから、分かりっこありません、というのが正解。上の結果は T_1 が区間 $[0, t]$ で一様分布にしたがうということで、分かりっこないということを確率で表現したものである。

練習 3.11 2 次元の場合に上の記述を確かめなさい。すなわち、パラメータ λ のポワソン過程 $\{N(t), t \geq 0\}$ で 1 番目、2 番目の事象の到着時刻をそれぞれ T_1, T_2 とする。また、 U_1, U_2 を区間 $[0, 1]$ で一様分布する独立な確率変数とし、 $U_{(1)} = \min\{U_1, U_2\}, U_{(2)} = \max\{U_1, U_2\}$ と置く。このとき、 $N(1) = 2$ という条件の下で、 $(U_{(1)}, U_{(2)})$ の結合分布と (T_1, T_2) の結合分布が一致することを示しなさい。

略解:

$$\begin{aligned} P(x < W_1 \leq x + dx, y < W_2 \leq y + dy | N(1) = 2) \\ &= \lambda e^{-\lambda x} dx \times \lambda e^{-\lambda(y-x)} dy \times e^{-\lambda(1-y)} \times \left(\frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}\right)^{-1} = 2 dx dy \\ P(x < U_{(1)} \leq x + dx, y < U_{(2)} \leq y + dy) \\ &= 2P(x < U_1 \leq x + dx, y < U_2 \leq y + dy) = 2 dx dy \end{aligned}$$

練習 3.12 ある銀行の窓口に 3 時間の間に 20 人来たとなると、最初の 1 時間の間に来た客の数はどれくらいと推測できますか。

(ヒント) ある客がいつ来たか分かりますか。

略解：20 人は 3 時間の間の「いつか」に来た、ということしか分からない、したがって、最初の 1 時間の間に来る客の数はパラメータ $20, 1/3$ の 2 項分布に従う。

練習 3.13 $N(t), M(t)$ をそれぞれパラメータ λ, μ の互いに独立なポワソン過程としたとき、 $N(t) + M(t)$ が独立増分を持つ計数過程であることを証明しなさい。

略解： $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ に対して $N(t_2) - N(t_1)$ と $N(t_4) - N(t_3)$ 、 $N(t_2) - N(t_1)$ と $M(t_4) - M(t_3)$ はたがいに独立、などを使えば、 $N(t_2) + M(t_2) - (N(t_1) + M(t_1))$ と $N(t_4) + M(t_4) - (N(t_3) + M(t_3))$ が独立になることが言える。

練習 3.14 来店客の 2 割だけが実際に買い物をするとして、午前中に 10 人の客が来た場合に、そのうち 2 人が買い物をした確率はいくつ。2 人以下の確率はいくつ。

略解：「客はポワソン過程に従って到着し」という条件が落ちている。パラメータ $10, 0.2$ の 2 項分布を当てはめればよい。

$$\binom{10}{2} 0.2^2 0.8^8 = 0.302$$

$$\sum_{k=0}^2 \binom{10}{k} 0.2^k 0.8^{10-k} = 0.678$$

練習 3.15 $\{N(t), t \geq 0\}$ をパラメータ λ のポワソン過程、 $\{L(t), t \geq 0\}$ をパラメータ μ のポワソン過程としたとき、 $\{N(t) + L(t), t \geq 0\}$ がパラメータ $\lambda + \mu$ のポワソン過程になることを示しなさい

(ヒント) 確率母関数を使いなさい。

略解： $N(t) + L(t)$ がパラメータ $\lambda + \mu$ のポワソン分布に従うことを示せば、あとは容易。 $N(t)$ の確率母関数 $G_{N(t)}(z)$ は

$$G_{N(t)}(z) = E(z^{N(t)}) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t(1-z)}$$

確率母関数を $G_X(z)$ とすると、

$$\begin{aligned} G_{N(t)+L(t)}(z) &= E(z^{N(t)+L(t)}) = E(z^{N(t)} z^{L(t)}) = E(z^{N(t)}) E(z^{L(t)}) \\ &= e^{-\lambda t(1-z)} e^{-\mu t(1-z)} = e^{-(\lambda+\mu)t(1-z)} \end{aligned}$$

これは確率母関数と分布の同一性により、 $N(t) + L(t)$ がパラメータ $\lambda + \mu$ のポワソン分布に従うことを表す。

練習 3.16 $\{N(t), t \geq 0\}$ をパラメータ λ のポワソン過程とし、奇数番目の事象の到着だけを数える計数過程を $\{M(t), t \geq 0\}$ としたとき、 $\{M(t), t \geq 0\}$ はポワソン過程になりますか。理由を付けて答えなさい。

(ヒント) 事象の到着間隔が指数分布になるかどうか調べなさい。

略解：1 番目と 3 番目の到着間隔は二つの指数分布の和でガンマ分布。したがって、ある区間の事象の生起回数はポワソン分布に従わない。

練習 3.17 $\{N(t), t \geq 0\}$ をパラメータ λ のポワソン過程とし、事象が到着したらコインを投げて表がでた場合だけカウントする、としたとき、この計数過程はポワソン過程になることを直感的に説明しなさい。その説明を裏付けるために証明しなさい。コインを投げる代わりに、奇数番目の事象は無視することにした場合は、無視されなかった事象の確率規則はポワソン過程に従うか。直感的に答えなさい。また、(微小間隔で) ベルヌイ試行を無数に繰り返したものがポワソン過程であるという考え方を使って、直感的な答えのもっともらしさを説明しなさい。

略解：ポワソン過程は表がでる確率が微少なコインをなげているようなもの。その特殊なコインとふつうのコインを投げて、同時に表が出るという事象をカウントするのは 2 項過程。したがって、そのコイン投げを高速化すれば、問題の計数過程が得られ、それはポワソン過程となる。

$$\begin{aligned}
 P(M(t) = n) &= E(P(M(t) = n | N(t))) \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} P(M(t) = n | N(t) = m) \frac{(at)^m}{m!} e^{-at} \\
 &= \sum_{m=n}^{\infty} \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n} \frac{(at)^m}{m!} e^{-at} \\
 &= \frac{(apt)^n}{n!} \sum_{m=n}^{\infty} (1-p)^{m-n} \frac{(at)^{m-n}}{(m-n)!} e^{-at} \\
 &= \frac{(apt)^n}{n!} e^{-at+a(1-p)t} = \frac{(apt)^n}{n!} e^{-apt}
 \end{aligned}$$

練習 3.18 管内の 1 週間の交通事故件数はほぼ 100 件、1 件あたりの死亡者 (24 時間以内死者) は 0.1 人だという。これからの 1 週間に交通事故で死ぬ人の数の平均はいくつか。

略解：複合ポワソン過程でモデル化して考えると、平均死者数は平均件数に平均死亡者数を掛けたものに等しい。つまり 10 人。

練習 3.19 $Y_1, Y_2, \dots$ をベルヌイ分布としたとき、 $Z(t)$ がパラメータ λpt のポワソン過程であることを証明し、その理由を考えなさい。

略解： Y の確率母関数は $pz + 1 - p$ だから、 $Z(t)$ の確率母関数は次の式で与えられる。

$$E(z^{Z(t)}) = \exp(-\lambda t(1 - G_Y(z))) = \exp(-\lambda tp(1 - z))$$

これは $Z(t)$ がパラメータ λpt のポワソン分布に従うことを意味する。ランダム分解と同じ。

練習 3.20 $\{N(t); t \geq 0\}$ はパラメータ λ のポワソン過程、 $Y_1, Y_2, \dots$ は $\{N(t); t \geq 0\}$ とは独立で、平均 μ 分散 σ^2 の独立同分布に従う確率変数の列とする。これらに対して新たな確率過程 $\{Z(t); t \geq 0\}$ を

$$Z(t) = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{N(t)}$$

によって定義する。このとき、 $Z(t)$ の平均と分散を求めなさい。

略解： Y のモーメント母関数を $M_Y(\theta)$ とする。

$$\begin{aligned}
 M_Z(\theta) &= E(e^{\theta Z(t)}) = E(E(e^{\theta Z(t)} | Z(t))) = \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{\theta(Y_1 + \dots + Y_n)} | Z(t) = n) \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{\theta Y})^n \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t M_Y(\theta))^n}{n!} e^{-\lambda t} = \exp(-\lambda t(1 - M_Y(\theta)))
 \end{aligned}$$

したがって、これを微分することにより、

$$\begin{aligned}\left. \frac{d}{d\theta} M_Z(\theta) \right|_{\theta=0} &= \lambda t \times \left(\frac{d}{d\theta} M_Y(0) \right) = \lambda t \mu \\ \left. \frac{d^2}{d\theta^2} M_Z(\theta) \right|_{\theta=0} &= (\lambda t)^2 \times \left(\frac{d}{d\theta} M_Y(0) \right)^2 + \lambda t \times \left(\frac{d^2}{d\theta^2} M_Y(0) \right) \\ &= (\lambda t \mu)^2 + \lambda t (\mu^2 + \sigma^2)\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}E(Z(\theta)) &= \lambda t \mu \\ E(Z(\theta)^2) &= \lambda t E(Y^2) + (\lambda t \mu)^2\end{aligned}$$

)

$$\Rightarrow V(Z(\theta)) = \lambda t E(Y^2) = \lambda t (\mu^2 + \sigma^2)$$

練習 3.21 ある生命保険会社には支払い請求が週平均 12 件の頻度で起き、そのうち実際に支払われるのは約 8 割で、1 件あたりの平均請求額は 1000 万円、標準偏差 400 万円だという。請求がポワソン過程で到着するとして、この会社の 1 週間の現金支払額の平均と分散を計算しなさい。

略解：支払額を計算するためには、実際に支払われる請求の到着過程と、請求額を使った複合ポワソン過程を考えればよい。単位時間を 1 週間とすれば、到着過程のパラメータ λ は $12 \times 0.8 = 9.6$ 、したがって、1 週間の平均支払額は $9.6 \times 1000 = 960$ 万円。分散は次の練習問題を解いて得られる公式

$$\lambda t (\mu^2 + \sigma^2)$$

に代入して

$$9.6 \times (100 + 16) \times 10^{12} = 1,113.6 \times 10^{12} = \left(\sqrt{33,371,000} \right)^2$$

演習問題

問題 3.1 $\{N(t); t \geq 0\}$ を斉時ポワソン過程とする。 $t, s > 0$ に対して、 $N(t)$ と $N(t+s)$ の積の期待値を求めなさい。

略解： $N(t)$ と $N(t+s)$ は独立ではないので、共分散の計算が必要。共分散を計算しなくても済むように、独立成分を抽出するように努める。 $N(t+s) = (N(t+s) - N(t)) + N(t)$ と書き直すと、第一項め $N(t+s) - N(t)$ は、時点 t から数え始めたときの長さ s の区間の増分で、区間 $[0, t]$ に到着する事象の回数とは無関係、独立。したがって、

$$\begin{aligned}E(N(t)N(t+s)) &= E(N(t)(N(t+s) - N(t) + N(t))) \\ &= E(N(t))E(N(t+s) - N(t)) + E(N(t)^2) \\ &= \lambda^2 ts + (\lambda t)^2 + \lambda t\end{aligned}$$

ポワソン分布の分散と期待値は同じ、ということを使った。

良くある間違い： $N(t+s) = N(t) + N(s)$ ではない

問題 3.2 ポワソン過程で $N(t) = n$ が与えられているとき、 $N(s)(s < t)$ の条件付き分布が 2 項分布に従うことを示しなさい。

(ヒント) 到着事象の一様性を使う

略解：直感的な説明、理解： $N(s) = k$ ならば $N(t) - N(s) = n - k$ 。区間 $[0, s]$ の間に k 回イベントが発生し、区間 $[s, t]$ の間に $n - k$ 回のイベントが発生する。個々のイベントはどこで起きてもおかしくない（到着時刻の一様性）。したがって、 n 個のモノをランダムに $s : t - s$ の比率で二つに分ける場合の確率規則と同じ。つまり、確率 $\frac{s}{t}$ で表の出るコインを n 回投げて表が k 回出る確率と同じ。

ちゃんとした証明：条件付き確率の定義にしたがって計算すると、

$$\begin{aligned} P(N(s) = k \mid N(t) = n) &= \frac{P(N(s) = k, N(t) = n)}{P(N(t) = n)} \\ &= \frac{P(N(t) = n \mid N(s) = k)P(N(s) = k)}{P(N(t) = n)} \\ &= \left(\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \right)^{-1} \left(\frac{(\lambda(t-s))^{n-k} e^{-\lambda(t-s)}}{(n-k)!} \right) \left(\frac{(\lambda s)^k e^{-\lambda s}}{k!} \right) \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(t-s)^{n-k} s^k}{t^n} = \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t} \right)^k \left(1 - \frac{s}{t} \right)^{n-k} \end{aligned}$$

これは、パラメータ $n, s/t$ の 2 項分布の確率関数。

問題 3.3 ある装置は k 回のショックで破壊される。ショックはパラメータ λ のポワソン過程にしたがって生じる。破壊される迄の時間 T の密度関数を求めなさい。

略解： T は k 番目の事象の到着時刻、すなわち、指数分布を k 個足したもの、つまり、ガンマ分布になる。ということを知っていればどうということはないが、知らない場合は、 T と $N(t)$ の関係を調べて、 $N(t)$ がパラメータ λt のポワソン分布にしたがうことを利用して計算する。密度関数はいきなりは計算できないので、累積分布関数 $P(T \leq t)$ を求めることに専念する。あとは微分するだけ。 $N(T) = k$ だが、そう考えても何の役にも立たない。

$T \leq t$ ということと $N(t) \geq k$ ということは同値（サンプルパスを描いてごらん）したがって、

$$\begin{aligned} P(T \leq t) &= \sum_{i=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} P(T \leq t) &= \sum_{i=k}^{\infty} \left(\frac{\lambda^i t^{i-1}}{(i-1)!} - \frac{\lambda^{i+1} t^i}{i!} \right) e^{-\lambda t} = \frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

問題 3.4 一年遠洋航海する船の機関に平均寿命が 1 年の部品が使われている。それがないと船が動かないという。部品の寿命は指数分布にしたがっているものとする。部品のスペアをいくつか持っていれば、独力で帰ってくる確率を 99% 以上にすることができますか。

略解：部品の寿命は指数分布に従うということから、部品の故障回数はパラメータ 1 のポワソン過程に従う。このとき、 $P(N(1) \leq k-1) \geq 0.99$ となる最小の k はいくつか、という問題。 $k = 1, 2, \dots$ について計算すると

$$0.36788, 0.73576, 0.91970, 0.98101, 0.99634, \dots$$

なので $k = 5$ 。

R でパラメータ a のポワソン分布の確率関数を計算する関数は `dpois(k,a)`、累積分布関数は `ppois(k,a)`。上の数列は、`ppois(0:4,1)` を計算させたものを貼り付けた。

問題 3.5 $X_1, X_2, \dots$ は独立にパラメータ λ の指数分布にしたがい、 M はそれらとは独立にパラメータ p の幾何分布にしたがうものとする。このとき、 $X_1 + X_2 + \dots + X_M$ はどのような分布になりますか。

略解： X, Y が独立ならば $E(e^{z(X+Y)}) = E(e^{zX})E(e^{zY})$ となるので、モーメント母関数を計算すると解決する場合が多い。この場合も、 M に条件 ($M = m$) を付ければモーメント母関数は m 個のモーメント母関数の積になることを利用して計算できる。

$$E\left(e^{z(X_1+X_2+\dots+X_M)}\right) = E\left(E\left(e^{z(X_1+X_2+\dots+X_M)}|M\right)\right) = E\left(\left(\frac{\lambda}{\lambda-z}\right)^M\right) = \frac{\lambda p}{\lambda p - z}$$

これはパラメータ λp の指数分布のモーメント母関数。

問題 3.6 パラメータがそれぞれ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ の互いに独立な指数分布にしたがう確率変数 X, Y, Z を考える。 $U = \min\{X, Z\}, V = \min\{Y, Z\}$ としたとき、以下の式を示しなさい。

$$P(U > u, V > v) = \exp(-\lambda_1 u - \lambda_2 v - \lambda_3 \max\{u, v\})$$

略解： $\min(X, Z) > u \Leftrightarrow \{X > u, Z > u\}$ だから

$$P(U > u, V > v) = P(X > u, Z > u, Y > v, Z > v)$$

互いに独立だから

$$\begin{aligned} &= P(X > u)P(Y > v)P(Z > u, Z > v) \\ &= \exp(-\lambda_1 u) \exp(-\lambda_2 v) P(Z > \max\{u, v\}) \\ &= \exp(-\lambda_1 u - \lambda_2 v - \lambda_3 \max\{u, v\}) \end{aligned}$$

問題 3.7 (続き) U, V は互いに独立ですか。また、 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に適当な値を与えて、R あるいは Excel を使って U, V の結合密度関数の図を描きなさい。

略解：たとえば、 λ_3 が λ_1, λ_2 に比べて極端に大きい場合、 U, V はほとんど Z に等しくなるので、独立とは言えない。実際、

$$\begin{aligned} P(U > u) &= P(\min\{X, Z\} > u) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_3)u} \\ P(V > u) &= P(\min\{Y, Z\} > u) = e^{-(\lambda_2 + \lambda_3)u} \end{aligned}$$

なので、

$$P(U > u, V > v) \neq P(U > u)P(V > v)$$

したがって、独立とはいえない。

結合密度関数は

$$-\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} P(U > u, V > v) = \begin{cases} (\lambda_1 + \lambda_3)\lambda_2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_3)u - \lambda_2 v}, & u > v > 0 \text{ の場合} \\ (\lambda_2 + \lambda_3)\lambda_1 e^{-\lambda_1 u - (\lambda_2 + \lambda_3)v}, & 0 < u \leq v \text{ の場合} \end{cases}$$

Excel で 2 変数関数 $f(x, y)$ のグラフを描くためには 2 次元の関数表を作って、「等高線」オプションを適用する。詳しくは Excel のページ参照：<http://www.f.waseda.jp/sakas/lecture/office/excel/math/math.htm>

R で 2 変数関数 $f(x, y)$ のグラフを描くには、persp 関数を使う。詳しくは R のページ参照：

<http://www.f.waseda.jp/sakas/sakalab/semi.R/Rgraphics.html#mozTocId225176>。

問題 3.8 バスの到着間隔は 10 分から 20 分の間の一様分布に従うものとします。客は平均 2 分間隔でポワソン過程に従って到着するものとする、次のバスに乗り込む客の数はどれくらいですか。平均と標準偏差を計算しなさい。

(ヒント) バスの到着間隔で条件を付けるのでしょう。バスの発車直後には誰もいないと仮定しましょう。

略解：

$$\begin{aligned} E(X) &= E(E(X | T)) \\ V(X) &= V(E(X | T)) + E(V(X | T)) \end{aligned}$$

という条件付き期待値の公式を使う問題。 $V(X) = E(V(X | T))$ とやっちゃいけない。

客はパラメータ $\lambda = 0.5$ のポワソン過程で到着する。バスに乗り込む客を X とすると、バスの到着間隔 T で条件を付けると

$$\begin{aligned} E(X | T = t) &= \lambda t \\ E(X(X-1) | T = t) &= (\lambda t)^2 \\ V(X | T = t) &= \lambda t \\ E(T) &= 15, V(T) = \frac{100}{12} \end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned} E(X) &= E(E(X | T)) = E(\lambda T) = \lambda E(T) = \frac{15}{2} \\ E(X(X-1)) &= E(E(X(X-1) | T)) = E(\lambda^2 T^2) = \frac{700}{12} \\ V(X) &= V(E(X | T)) + E(V(X | T)) \\ &= V(\lambda T) + E(\lambda T) \\ &= \frac{25}{12} + \frac{15}{2} = \frac{115}{12} = 9.58... \end{aligned}$$

問題 3.9 複合ポワソン過程 $\{Z(t); t \geq 0\} + \{Y_n\}$ について、特に $Y_1, Y_2, \dots$ がベルヌイ分布に従うとすると、 $\{Z(t); t \geq 0\}$ はポワソン過程になることを示しなさい。ただし、ベルヌイ分布は以下で定義されるものとします。

$$P(Y = 1) = p, P(Y = 0) = 1 - p$$

略解：ポワソンイベントの発生のたびにベルヌイ分布、すなわち、気まぐれに 1 だったり 0 だったりするものを累積するということは、ポワソン過程のランダム分解と同じ、従って $\{Z(t); t \geq 0\}$ はポワソン過程。

きちんとした証明は確率母関数による。 $\{Z(t); t \geq 0\}$ は非負の整数値をとるので、その確率母関数を考える。 Y の確率母関数を $G_Y(z)$ として、 $N(t) = n$ としたときの条件付き期待値は

$$E(z^{Z(t)} | N(t) = n) = G_Y(z)^n$$

条件をはずし、 $G_Y(z) = pz + 1 - p$ を代入すると、 $Z(t)$ の確率母関数は次の式で与えられる。

$$E(z^{Z(t)}) = \sum_{n=0}^{\infty} G_Y(z)^n \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = \exp(-\lambda t(1 - G_Y(z))) = \exp(-\lambda t p(1 - z))$$

これは $Z(t)$ がパラメータ $\lambda p t$ のポワソン分布に従うことを意味する。

問題 3.10 複合ポワソン過程 $\{Z(t); t \geq 0\} + \{Y_n\}$ (ジャンプ量が $\{Y_n\}$ の複合ポワソン過程のこと) のモーメント母関数を計算しなさい。ただし、 $Y_1, Y_2, \dots$ のモーメント母関数を $M_Y(\theta)$ とします。

略解：

$$\begin{aligned} M_Z(z) &= E(e^{zZ(t)}) = E(E(e^{zZ(t)} \mid Z(t))) = \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{z(Y_1 + \dots + Y_n)} \mid Z(t) = n) \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{zY})^n \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t M_Y(z))^n}{n!} e^{-\lambda t} = \exp(-\lambda t(1 - M_Y(z))) \end{aligned}$$

問題 3.11 (続き) この結果を使って $Z(t)$ の平均と分散を求めなさい。

略解：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} M_Z(z) &= \lambda t \frac{d}{dz} M_Y(z) \times M_Y(z) \Rightarrow E(Z(t)) = \lambda t E(Y) \\ \frac{d^2}{dz^2} M_Z(z) &= \left(\lambda t \frac{d^2}{dz^2} M_Y(z) + \left(\lambda t \frac{d}{dz} M_Y(z) \right)^2 \right) M_Y(z) \Rightarrow V(Z(t)) = \lambda t E(Y^2) \end{aligned}$$

問題 3.12 (続き) この結果を使って最初の問題を証明しなさい。

略解：ベルヌイ分布のモーメント母関数は

$$M_Y(z) = 1 - p + pe^z$$

したがって、 $Y_1, Y_2, \dots$ がベルヌイ分布に従う複合ポワソン過程 $\{Z(t); t \geq 0\}$ のモーメント母関数は

$$\exp(-\lambda p t(1 - e^z))$$

一方、パラメータ μ のポワソン過程を $\{N(t); t \geq 0\}$ とすると、 $N(t)$ のモーメント母関数は

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{zn} \frac{(\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t} = \exp(-\mu t(1 - e^z))$$

で与えられるので、 $\{Z(t); t \geq 0\}$ はパラメータ λp のポワソン過程に従うことが分かる。

問題 3.13 毎日発表される日経平均株価で、前日比で 2% 以上変化したときに事象が到着したと考えて計数過程を構成したとき、それがポワソン過程でモデル化できるかどうかを検証しなさい。データはインターネットから見つけてきなさい。

略解： $\{N(t), t \geq 0\}$ がポワソン過程にしているかどうかを検証するには、到着間隔が互いに独立で同一の指数分布に従っていることを確かめれば良い。データがある確率分布にしていることを検定するのは適合度検定、コルモゴロフスミルノフ検定、確率プロットなどがある。

問題 3.14 大地震の発生を事象の到着として計数過程を考えると、それがポワソン過程でモデル化できるかどうかを検証しなさい。データはインターネットから見つけてきなさい。

略解：

4 ランダムウォークとブラウン運動

練習 4.1 $P(S_{2n+1} = 2k+1), P(S_n = k)$ が次の式で与えられることを確かめなさい。

$$P(S_{2n+1} = 2k+1) = \binom{2n+1}{n+k+1} p^{n+k+1} (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, -n-1$$

$$P(S_n = k) = \binom{n}{(n+k)/2} p^{(n+k)/2} (1-p)^{(n-k)/2}, \quad k = n, n-2, \dots, -n$$

略解： $2n+1$ 回の推移の内、プラスが u 回、マイナスが d 回とすると、

$$u + d = 2n + 1, u - d = 2k + 1$$

なので、これを解くと $u = n + k + 1$ 。これを次の式に代入すると上の式が得られる。

$$P(S_{2n+1} = 2k+1) = \binom{2n+1}{u} p^u (1-p)^{2n+1-u}$$

$P(S_n = k)$ の式は、偶数の場合と一緒にしただけ。代入すればよい。

練習 4.2 $p = 0.5$ のランダムウォーク $\{S_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ について、 S_n の確率関数と、その期待値、分散を計算しなさい。

略解：

$$P(S_n = k) = \binom{n}{(n+k)/2} 2^{-n}, \quad k = n, n-2, \dots, -n$$

$S_n = S_{n-1} + X_n$ としたとき

$$E(X_n) = 0, V(X_n) = 1$$

したがって、

$$E(S_n) = E(S_{n-1}) = \dots = E(S_0) = 0$$

$$V(S_n) = V(S_{n-1}) + 1 = \dots = V(S_0) + n = n$$

練習 4.3 n が大きいとき、スターリングの公式を用いて、 v_{2n} が上のように表されることを導きなさい。

略解：

$$v_{2n} = \binom{2n}{n} 2^{-2n} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \approx \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}}{4^n n^{2n} e^{-2n} \times 2\pi n} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

練習 4.4 $(1 - z^2)^{-0.5}$ をテーラー展開したものを書き直すと、 $(-z^2)^n$ の係数が v_{2n} 、すなわち対称なランダムウォークの原点回帰確率に等しくなることを確かめなさい。

略解： $(1 - z^2)^{-0.5}$ のテーラー展開を考える。一般化二項係数を使って、

$$(1 - z^2)^{-0.5} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-0.5}{n} (-z^2)^n$$

となるので、これを整理する。

$$\begin{aligned} \binom{-0.5}{n} &= \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \left(-\frac{1}{2} - 2\right) \cdots \left(-\frac{1}{2} - n + 1\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n! 2^n} 1 \times 3 \times 5 \times \cdots (2n-1) \\ &= \frac{(-1)^n}{n! 2^n} 1 \times 3 \times 5 \times \cdots (2n-1) \times \frac{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n}{2^n n!} \\ &= (-1)^n \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} \end{aligned}$$

したがって、

$$(1 - z^2)^{-0.5} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{z^{2n}}{2^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} v_{2n} z^{2n}$$

練習 4.5 $(0, -k)$ から (n, m) へ至るランダムウォークのパスの本数が

$$\binom{n}{(n+k+m)/2}$$

で与えられることを導きなさい。

略解： n 回のうち u 回は上に、 d 回は下に推移したとすると、

$$u + d = n, \quad u - d = k + m$$

となるので、 $u = (n + k + m)/2$

練習 4.6 $2n$ 回推移の間、負にならない確率は、 $2n$ 回目で原点を訪問する確率 v_{2n} と等しいことを証明しなさい。

(ヒント) $2n$ 回後に状態 $(0, 2, 4, \dots)$ に関して全確率の公式を適用することを考えなさい。

略解： $2n$ 回の推移で負にならないという事象を A とする。 S_{2n} は 0 か、あるいは正の偶数でなければいけない。したがって、全確率の公式より次が成り立つ

$$P(A) = \sum_{k=0}^n P(A, S_{2n} = 2k)$$

$P(A, S_{2n} = 2k)$ については鏡像の原理を使って

$$P(A, S_{2n} = 2k) = \binom{2n}{n+k} 2^{-2n} - \binom{2n}{n+k+1} 2^{-2n}$$

これを $k = 0, 1, 2, \dots$ について加えると $\binom{2n}{n} 2^{-2n} = v_{2n}$ だけが残る。

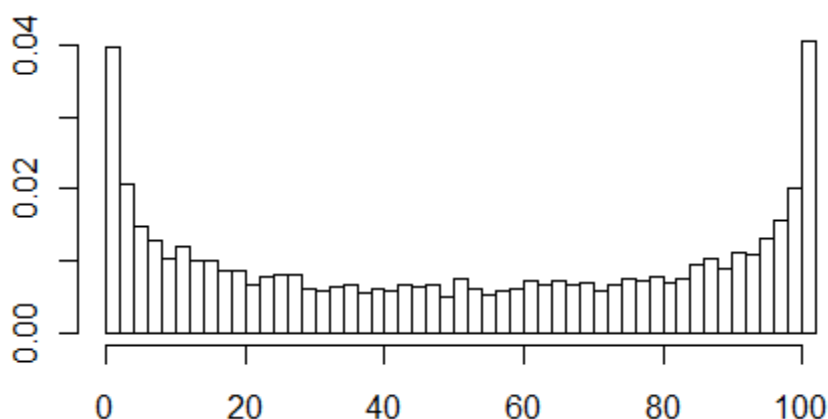
練習 4.7 コインを投げて表が出たら 1、さもなければ -1 ということを $n (= 100)$ 回繰り返してその累積和を計算し、累積和が最後に 0 となる時点を記録する（一度も 0 にならなければ 0 を記録）という試行を 1000 回繰り返し、記録した数字のヒストグラムを描きなさい。Excel だと大変、R を使いなさい。コイン投げは「`sample(c(-1,1),n,replace=T)`」、累積和は「`cumsum`」関数を使う。最後の 0 となる時点を知るには `which` 関数を使う。

略解：R のプログラムを載せる

プログラム例

```
# ランダムウォークが最後に原点をヒットする時点を計算する関数
lastvisit = function(n) {
  rw = cumsum(c(0,sample(c(-1,1),n,replace=T))) # ランダムウォークのサ
 ンプル
  zr = which(rw==0) - 1 # 原点の訪問時点すべて
  max(zr) # 最後のx軸訪問時点 (関数値)
}
# lastvisit を使って分布計算
hist(sapply(rep(100,10000), lastvisit)+0.1, breaks=51, freq=F) # 取り得
る値は 51 通り
```

10000 回の実験結果は次の通り。



練習 4.8 $2n$ 回勝負して、途中勝ち数が常に負け数を上回っていながら最後に引き分けで終わる確率 w_{2n} が次の式で与えられることを証明しなさい。

$$w_{2n} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{4n} u_{2n-2}$$

(ヒント) 条件に当てはまるパスは、点 $(1, 1)$ から点 $(2n-1, 1)$ を経由し、時点 2 から時点 $2n-2$ までは 0 という状態を取ることはできません。状態 0 を通るパスの本数は鏡像の原理によって数えることが出来ませんか。

略解：最初勝って、その後 $2n-1$ 回後に始めて原点を訪問する確率 $f_1(2n-1)$ を求めることと同じ。したがって、

$$w_{2n} = \frac{1}{2} f_1(2n-1) = \frac{1}{2} \frac{1}{2n-1} \binom{2n-1}{n} 2^{-2n+1} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} 2^{-2n}$$

練習 4.9 $2n$ 回勝負して、途中負け越さずに最後に引き分けで終わる確率が $4w_{2n+2}$ で与えられることを説明しなさい。

略解： $2n+1$ 回目で始めて負け越す確率を計算して、最後の勝負をしなかったことにすれば良い。 $2n+1$ 回目で始めて負け越す確率は $f_1(2n+1)$ に等しいので、目的の確率は

$$2f_1(2n+1) = \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{n+1} 2^{-2n} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} 2^{-2n} = 4w_{2n+2}$$

練習 4.10 $2n$ 回勝負して最終結果は引き分けだったとき、途中正の領域にある比率が m/n である（条件付き）確率は、 $m = 0, 1, \dots, n$ で一定であることを証明しなさい。したがって、たとえば、すべて正の領域で勝負を終える確率は $\frac{1}{n+1}$ で与えられます。

（ヒント） $p_m(n)$ と同じように考えればよい。最終結果は引き分けで、途中正の領域にある比率が m/n である確率を $q_m(n)$ と書くことにすると、最初に状態 0 に戻る時点で分類した全確率の公式を適用した $q_m(n)$ に関する漸化式を導くことが出来るはずです。あとは数学的帰納法。

略解：

練習 4.11 非対称なランダムウォークで、原点から出発して n ステップ後に初めて状態 s を訪問する確率を計算しなさい。

略解：対称なランダムウォークの場合は、

$$f_s(n) = \frac{s}{n} \binom{n}{(n+s)/2} 2^{-n}$$

非対称の場合は測度変換の尤度関数を考慮すれば良いので、

$$\begin{aligned} \tilde{f}_s(n) &= \frac{s}{n} \binom{n}{(n+s)/2} 2^{-n} \frac{e^{\theta s}}{(M_U(\theta))^n} \\ &= \frac{s}{n} \binom{n}{(n+s)/2} 2^{-n} \left(2\sqrt{p(1-p)}\right)^n \left(\frac{p}{1-p}\right)^{s/2} \\ &= \frac{s}{n} \binom{n}{(n+s)/2} p^{(n+s)/2} (1-p)^{(n-s)/2} \end{aligned}$$

練習 4.12 非対称なランダムウォークで、原点から出発し、 n ステップ後に状態 $k(>0)$ を訪問するまで、一度も状態 $s(>k)$ を訪問しない確率が以下で与えられることを示しなさい。

$$q_k^{(n)} - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{s-k} q_{2s-k}^{(n)}$$

略解：上の問題は、状態 $k-i$ を訪問する前に状態 $-i$ を訪問しない確率だった。 $k-i$ の代わりに k 、 $-i$ の代わりに s を代入すれば良い。

$$q_k^{(n)} - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{-s} q_{k-2s}^{(n)}$$

第二項が与えられた式になることを言えばよい。

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-p}{p}\right)^{-s} q_{k-2s}^{(n)} &= \left(\frac{1-p}{p}\right)^{-s} m_{k-2s}^{(n)} p^{(n+k-2s)/2} (1-p)^{(n-k+2s)/2} \\ &= m_{2s-k}^{(n)} p^{(n+k)/2} (1-p)^{(n-k)/2} = q_{2s-k}^{(n)} \times p^{k-s} (1-p)^{s-k} \end{aligned}$$

これが求めたいものであった。

一から考えても、同様な結果を導くことができる。対称なランダムウォークの場合は、

$$r_{s,k}(n) = \left(\binom{n}{(n+k)/2} - \binom{n}{(n+2s-k)/2} \right) 2^{-n}$$

なので、非対称の場合は尤度関数を使って変換すれば良い。

$$\begin{aligned}\tilde{r}_{s,k}(n) &= \left(\binom{n}{(n+k)/2} - \binom{n}{(n+2s-k)/2} \right) 2^{-n} \frac{e^{\theta k}}{(M_U(\theta))^n} \\ &= \left(\binom{n}{(n+k)/2} - \binom{n}{(n+2s-k)/2} \right) p^{(n+k)/2} (1-p)^{(n-k)/2} \\ &= q_k^{(n)} - q_{2s-k}^{(n)} \times p^{k-s} (1-p)^{s-k}\end{aligned}$$

練習 4.13 次の式を証明せよ。

$$P(T_0 = n \mid S_0 = i) = (1-p) \left(q_{1-i}^{(n-1)} - \left(\frac{1-p}{p} \right)^i q_{1+i}^{(n-1)} \right)$$

略解：\$(i, 0)\$ を原点と考えると、対称なランダムウォークの場合は、原点から出発して \$n\$ ステップで初めて \$-i\$ に到達する確率と等しいので、鏡像の原理を使って次のように計算できる。

$$f_{-i}(n) = \left(\binom{n-1}{(n-i)/2} - \binom{n-1}{(n-i-2)/2} \right) 2^{-n}$$

非対称の場合は尤度関数を使って変換すれば良い。

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{-i}(n) &= \left(\binom{n-1}{(n-i)/2} - \binom{n-1}{(n-i-2)/2} \right) p^{(n-i)/2} (1-p)^{(n+i)/2} \\ &= (1-p) q_{1-i}^{n-1} - \binom{n-1}{(n+i)/2} p^{(n-i)/2} (1-p)^{(n+i)/2} \\ &= (1-p) q_{1-i}^{(n-1)} - q_{1+i}^{(n-1)} \times p^{-i} (1-p)^{i+1}\end{aligned}$$

これが求めたいものであった。

練習 4.14 対称な場合の最小値の分布を直接導き、非対称の場合に求めた式の \$p\$ に 0.5 を入れた式と一致することを確認せよ。

$$P(\min Z_{1:n} = k \mid Z_0 = 0) = \left(m_k^{(n)} - m_{1-k}^{(n)} \right) 2^{-n}$$

略解：時点 \$n\$ での状態 \$S_n = i > k-1\$ で層別して考える。状態 \$k-1\$ を訪問しないパスは鏡像の原理から

$$P(S_{\min}(n) \geq k, S_n = i \mid S_0 = 0) = \left(m_i^{(n)} - m_{2k-i-2}^{(n)} \right) 2^{-n}, \quad i = k, k+1, \dots$$

したがって、

$$P(S_{\min}(n) \geq k \mid S_0 = 0) = \sum_{i=k}^n \left(m_i^{(n)} - m_{2k-i-2}^{(n)} \right) 2^{-n}$$

確率関数は

$$\begin{aligned}P(S_{\min}(n) = k \mid S_0 = 0) &= \sum_{i=k}^n \left(m_i^{(n)} - m_{2k-i-2}^{(n)} \right) 2^{-n} - \sum_{i=k+1}^n \left(m_i^{(n)} - m_{2k-i}^{(n)} \right) 2^{-n} \\ &= \left(m_k^{(n)} - m_{k-1}^{(n)} \right) 2^{-n}\end{aligned}$$

練習 4.15 勝つ確率が \$p\$ の場合の破産確率 \$r_i\$ の式が、\$p = 0.5\$ として得られた公式 \$r_i = 1 - i/n\$ を特別な場合として含んでいることを示しなさい。

$$r_i = \frac{\left(\frac{1-p}{p} \right)^n - \left(\frac{1-p}{p} \right)^i}{\left(\frac{1-p}{p} \right)^n - 1}$$

略解： $p = 0.5$ の場合は不定形になるので、 $(1-p)/p$ を一つの変数と思って分母分子を微分すると、 $r_i = (n-i)/n = 1 - i/n$ が得られる。

練習 4.16 標準ブラウン運動 $\{B(t), t \geq 0\}$ に対して、(1) $B(s)B(t+s)$ の期待値を計算しなさい。(2) $B(s)$ と $B(t+s)$ の共分散を計算しなさい。

略解：(1)

$$E(B(s)B(t+s)) = E(B(s)(B(t+s) - B(s) + B(s))) = 0 + V(B(s)) = s$$

(2) $E(B(s)) = 0$ なので、

$$\text{Cov}(B(s), B(t+s)) = s$$

練習 4.17 平均 μ 分散 σ^2 の正規分布に従う確率変数 X に対して、 $Y = e^X$ としたとき、 Y の期待値は X のモーメント母関数 $M_X(\theta)$ を使って $M_X(1)$ で与えられることを示しなさい。このことを使って $Z(t)$ が平均 $\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t$ 、分散 $\sigma^2 t$ の正規分布に従うとき、 $e^{Z(t)}$ の期待値が e^{rt} になることを示しなさい。

略解： X のモーメント母関数 $M_X(\theta)$ は $e^{\theta X}$ の期待値、したがって e^X の期待値は $M_X(1)$ 。正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ のモーメント母関数は $\exp\left(\mu\theta + \frac{\sigma^2}{2}\theta^2\right)$ 、従って、 $M_Z(1) = \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \frac{\sigma^2}{2}t\right) = e^{rt}$ 。

練習 4.18 平均 μ 分散 σ^2 の正規分布に従う確率変数 X に対して、 e^X の密度関数が

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(\log x - \mu)^2 / (2\sigma^2)} \quad (2)$$

で与えられることを示し、その期待値を計算し、それが $M_X(1)$ に一致することを示しなさい。ただし、 $M_X(\theta)$ は X のモーメント母関数とします。

略解： e^X の累積分布関数は次で与えられる。

$$P(e^X \leq x) = P(X \leq \log x) = \int_{-\infty}^{\log x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(t-\mu)^2 / (2\sigma^2)} dt \quad (3)$$

これを微分して、

$$\frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(\log x - \mu)^2 / (2\sigma^2)} \quad (4)$$

その期待値を定義式にしたがって計算すると

$$E(e^X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(\log x - \mu)^2 / (2\sigma^2)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^s \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(s-\mu)^2 / (2\sigma^2)} ds$$

e の肩の式だけを取り出せば

$$s - \frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2} = -\frac{(s-(\mu+\sigma^2))^2}{2\sigma^2} + \mu + \frac{\sigma^2}{2} \quad (5)$$

となるので

$$Ev(e^X) = e^{\mu+\sigma^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(s-(\mu+\sigma^2))^2 / (2\sigma^2)} ds = e^{\mu+\sigma^2/2}$$

一方 X のモーメント母関数は

$$M_X(\theta) = \exp\left(\mu\theta + \frac{\sigma^2}{2}\theta^2\right) \Rightarrow M_X(1) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \quad (6)$$

演習問題

問題 4.1 (1) 日経平均株価の 1 年分 $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ を使って、日次収益率 $(x_{n+1} - x_n)/x_n$ を計算し、その平均、標準偏差を推定しなさい。

(2) 1 年を 1 単位時間とすると、 $\Delta t = 1/N$ として、 $X(n\Delta t) = x_n$ という標本値が得られた、と考えることが出来る。(1) で得られた平均、標準偏差を $\mu\Delta t, \sigma\sqrt{\Delta t}$ と見なして、

$$\frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{X(t)} = \mu\Delta t + \sigma(B(t + \Delta t) - B(t))$$

という確率微分方程式の離散バージョンの式を利用し、正規乱数を使って、日経平均株価の擬似データを生成し、実データと重ねて描きなさい。ただし、 $B(t)$ は標準ブラウン運動とします。再計算キーを押して、いろいろな擬似データを作成し、それらの総合的な印象を説明しなさい。

略解：

問題 4.2 確率 $p = 0.5(1 + \mu\sqrt{\Delta t})$ で $\sqrt{\Delta t}$ 増え、確率 $1 - p$ で $\sqrt{\Delta t}$ 減るという動きを Δt きざみでくりかえすランダムウォークを考える。このとき、 $\Delta t \rightarrow 0$ とすると、このランダムウォークはドリフトパラメータ μ を持つブラウン運動に収束することを示しなさい。

略解：独立増分は明らか。

$$P(X = \sqrt{\Delta t}) = 0.5(1 + \mu\sqrt{\Delta t}), P(X = -\sqrt{\Delta t}) = 0.5(1 - \mu\sqrt{\Delta t})$$

$$S_n = S_{n-1} + X_n$$

とすると、 $t = n\Delta t = \text{一定}$ 、として $n \rightarrow \infty$ とすれば、

$$E(S_n) = n\Delta x(2p - 1) = n\mu\Delta t \rightarrow \mu t$$

$$V(S_n) = 4np(1 - p)(\Delta x)^2 = n\Delta t(1 - \mu^2\Delta t) \rightarrow t$$

S_n にドモアブル・ラプラスの定理を適用すると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}$$

は標準正規分布に従う。したがって、 $S(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ は平均 μt 、分散 t の正規分布に従うモーメント母関数を使っても良い

$$\begin{aligned} M_X(z) &= \frac{1}{2} \left(e^{z\sqrt{\Delta t}} + e^{-z\sqrt{\Delta t}} \right) + \frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{2} \left(e^{z\sqrt{\Delta t}} - e^{-z\sqrt{\Delta t}} \right) \\ &= \left(1 + \frac{\Delta t}{2} z^2 + \frac{(\Delta t)^2}{2} z^4 + \dots \right) + \mu \left((\Delta t)z + \frac{(\Delta t)^2}{3!} z^3 + \dots \right) \\ &= 1 + \left(\mu z + \frac{1}{2} z^2 \right) \Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} M_{S_n}(z) &= (M_X(z))^n = \left(1 + \left(\mu z + \frac{1}{2} z^2 \right) \frac{t}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^n \\ &\rightarrow \exp \left(\mu t z + \frac{1}{2} t z^2 \right) \end{aligned}$$

これは $S(t)$ が平均 μt 、分散 t の正規分布に従うことを意味する

問題 4.3 $X(n\Delta t)$ は Δt 後に確率 $p = 0.5(1 + \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta t})$ で $e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}X(n\Delta t)$ になり、確率 $1-p$ で $e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}X(n\Delta t)$ になるという動きを $n = 1, 2, \dots$ で繰り返す、という確率過程を考える。このとき、 $t = n\Delta t$ (一定) として、 $\Delta t \rightarrow 0$ とすると、 $\log X(t)$ は平均 μt 、分散 $\sigma^2 t$ の正規分布に従う確率変数に収束することを示しなさい。

略解：

$$P(Y = \sigma\sqrt{\Delta t}) = p, P(Y = -\sigma\sqrt{\Delta t}) = 1 - p$$

$$S_n = \log X(n\Delta t)$$

と定義すると、

$$S_n = S_{n-1} + Y_n$$

$$E(Y) = \mu\Delta t, V(Y_n) = \sigma^2\Delta t - (\mu\Delta t)^2$$

と表すことが出来る。あとは問題 2 を使えばよい。

問題 4.4 ドリフトパラメータ μ 、拡散パラメータ σ を持つブラウン運動を $\{X(t), t \geq 0\}$ としたとき、 $X(t), X(t+s)$ の結合密度関数を計算しなさい。

略解： $X(t)$ は平均 μt 、分散 $\sigma^2 t$ の正規分布に従い、独立増分を持つので、 $X(t+s) - X(t)$ は平均 μs 、分散 $\sigma^2 s$ の正規分布をもち、 $X(t)$ とは独立。したがって、

$$P(x < X(t) \leq x + dx, y < X(t+s) \leq y + dy)$$

$$= P(y < X(t+s) \leq y + dy \mid x < X(t) \leq x + dx)P(x < X(t) \leq x + dx)$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{st}} \exp\left(-\frac{(y-x-\mu s)^2}{2\sigma^2 s} - \frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right) dx dy$$

したがって、 $X(t), X(t+s)$ の結合密度関数は

$$\frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{st}} \exp\left(-\frac{(y-x-\mu s)^2}{2\sigma^2 s} - \frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right)$$

問題 4.5 対称なランダムウォークと正整数 $a, b > 0$ に対して、 $-b$ を訪問する前に a を訪問する確率を計算しなさい

ヒント： $-b$ を訪問する前に a を訪問するという事象を A として、 $-b < i < a$ に対して、 $X_0 = i$ としたときの A の条件付き確率を r_i と置くと、 r_i は r_{i-1}, r_{i+1} を使って表される。あとは差分方程式を解く問題。

略解：

問題 4.6 対称なランダムウォークと正整数 $a > 0$ に対して、初めて a を訪問するまでの時間を T としたとき、 $T \leq n$ となる確率を計算しなさい。

問題 4.7 対称なランダムウォークと正整数 $a, b > 0$ に対して、初めて $-b$ か a を訪問するまでの時間の期待値は ab で与えられることを証明しなさい。

ヒント：状態 i から始めて、初めて $-b$ か a を訪問するまでの時間の期待値を t_i として、 t_i を t_{i+1}, t_{i-1} を使って表し、差分方程式を作る。あとは境界条件 $t_{-b} = t_a = 0$ を使う。 $t_{a-1} = t_{-b+1}, t_{a-2} = t_{-b+2}, \dots$ などが成り立っているはず。

略解：ヒントにしたがって、

$$t_i = 1 + \frac{1}{2}t_{i+1} + \frac{1}{2}t_{i-1} \Leftrightarrow t_{i+1} - t_i = t_i - t_{i-1} - 2, \quad i = a, a-1, \dots, -b+1, b$$

順番に代入すると

$$t_i - t_{i-1} = t_{i-1} - t_{i-2} - 2 = \dots = t_{-b+1} - t_{-b} - 2(i+b-1)$$

特に、 $i = a$ と置いて、ランダムウォークの対称性 ($t_{a-1} = t_{-b+1}$) を使うと、

$$t_a - t_{a-1} = t_{-b+1} - t_{-b} - 2(a+b-1) \Leftrightarrow t_{a-1} = a+b-1$$

ここで、 $t_a = t_{-b} = 0$ を使った。これにより、

$$t_i - t_{i-1} = a+b-1-2(i+b-1), \quad i = a, a-1, \dots, -b+1, b$$

がなりたつ。 $i, i-1, i-2, \dots, -b+1$ について加えると、

$$t_i - t_{i-1} = (i+b)(a+b-1) - (i+b)(i+b-1) = (a-i)(i+b)$$

が得られる。したがって、 $i = 0$ からスタートした場合は、 a または b に到達するまでの時間の期待値は ab となる。

問題 4.8 標準ブラウン運動 $B(t)$ について、 $P(B(2) > 2 \mid B(0) = 0)$ を求めなさい

略解： $B(2) \mid B(0) = 0$ は平均 0 分散 2 の正規分布に従うので、 $\Phi(x)$ を標準正規分布の分布関数とすると、

$$1 - \Phi(\sqrt{2})$$

問題 4.9 標準ブラウン運動 $B(t)$ について、定数 $c > 0$ としたとき、 $B(ct)/\sqrt{c}$ も標準ブラウン運動に従うことを説明しなさい。

ヒント： $B(ct)/\sqrt{c}$ が平均 0、分散 t の正規分布に従っていることを言えばよい。

略解： $B(ct)$ は平均 0 分散 ct の正規分布に従うので $B(ct)/\sqrt{c}$ は平均 0 分散 t の正規分布に従う

問題 4.10 標準ブラウン運動 $B(t)$ について、 $E(B(t)B(t+s))$ を求めなさい。ただし $s > 0$ とする。

略解：練習 4.16 と同じ

問題 4.11 拡散パラメータが σ のブラウン運動 $B(t)$ で、 $B(1) = \sigma$ という条件の下で $B(2) > 0$ である確率を計算しなさい。

略解： $B(2) \mid B(1) = \sigma$ は平均 σ 、分散 σ^2 の正規分布に従うので、

$$P(B(2) > 0 \mid B(1) = \sigma) = 1 - \Phi(-1) = \Phi(1)$$

問題 4.12 拡散パラメータが σ のブラウン運動 $B(t)$ で、 $B(2) = \sigma$ という条件の下で $B(1) > 0$ である確率を計算しなさい。

略解：

$$\begin{aligned}
 P(B(1) > 0 \mid B(2) = \sigma) &= \int_0^\infty \frac{f_{B(1), B(2)}(x, \sigma)}{f_{B(2)}(\sigma)} dx \\
 &= \int_0^\infty \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2} - \frac{(x-\sigma)^2}{2\sigma^2} + \frac{\sigma^2}{4\sigma^2}\right) dx \\
 &= \int_0^\infty \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} \left(x - \frac{\sigma}{2}\right)^2\right) dx \\
 &= \int_{-1/\sqrt{2}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)
 \end{aligned}$$

問題 4.13 拡散パラメータが σ のブラウン運動 $B(t)$ について、初めて $a(>0)$ となる時刻を T_a としたとき、 $T_a > 1$ となる確率を計算しなさい

ヒント： $B(1) \geq a$ という事象と $T_a > 1$ という事象の関係を調べなさい。

略解： $B(1) \geq a$ となる確率を、 $T_a > 1$ か否かという事象で層別して計算する

$$\begin{aligned}
 P(B(1) \geq a) &= P(B(1) \geq a \mid T_a \leq 1)P(T_a \leq 1) \\
 &\quad + P(B(1) \geq a \mid T_a > 1)P(T_a > 1) \\
 &= \frac{1}{2}P(T_a \leq 1) + 0
 \end{aligned}$$

したがって

$$P(T_a \leq 1) = 2P(B(1) \geq a) = 2(1 - \Phi((a/\sigma)))$$

問題 4.14 拡散パラメータが σ のブラウン運動 $B(t)$ について、 $[0, 1]$ での最大値が a 以下となる確率を計算しなさい。

ヒント：ある区間で最大値が a 以下となる事象と、初めて a を訪問するのがその区間の外、という事象の関係を調べなさい。

略解：

$$P\left(\max_{0 \leq t \leq 1} B(t) \leq a\right) = P(T_a > 1) = 2\Phi((a/\sigma)) - 1$$

問題 4.15 株価の変化量（将来の株価から現在価格を引いたもの）が拡散パラメータ σ のブラウン運動に従うものとします。 $t, T, a > 0$ として、時刻 t で $-a$ に値下がりした、という条件の下で、時刻 $t+T$ に 0 以上になる（値を戻す）確率を計算しなさい。

ヒント：再生性を使いなさい。

略解：正規分布 $N(0, T)$ が a 以上となる確率と同じ

問題 4.16（続き） $t+T$ までに値を戻す確率を計算しなさい。

略解：原点から出発して初めて a を訪問する時刻が T 以下の確率と同じ。

問題 4.17 株価の変化量（将来の株価から現在価格を引いたもの）が拡散パラメータ σ のブラウン運動に従うものとします。 $t, T, a > 0$ として、 $[t, t+T]$ の間の最大値が a 以上となる確率を計算しなさい

ヒント：時刻 t の株価（の変化量）で条件を付けて計算する。 $B(t) = x > a$ ならば確率 1、 $x < a$ の場合は...

略解：時刻 t の株価（の変化量）で条件を付けて計算する。 $B(t) = x > a$ ならば確率 1、 $x < a$ の場合は

$$P\left(\max_{t \leq s \leq t+T} B(s) \geq a \mid B(t) = x\right) = P\left(\max_{0 \leq s \leq tT} B(s) \geq a - x\right) = P(T_{a-x} < T)$$

したがって

$$\begin{aligned} P(T_{a-x} < T) &= 2P(B(T) \geq a - x) = 2P\left(\frac{B(T)}{\sqrt{T}} \geq \frac{a - x}{\sqrt{T}}\right) \\ &= 2\left(1 - \Phi\left(\frac{a - x}{\sqrt{T}}\right)\right) \end{aligned}$$

合計すると

$$P\left(\max_{t \leq s \leq t+T} B(s) \geq a\right) = \int_{-\infty}^a 2\left(1 - \Phi\left(\frac{a - x}{\sqrt{T}}\right)\right) \phi_t(x) dx + 1 - \Phi_t(a)$$

ただし、 $\phi_t(x)$ は平均 0、分散 t の正規分布の密度関数。

問題 4.18 ある企業の短期資金は拡散パラメータ σ のブラウン運動に従うものとする。資金が $b(>0)$ を超えたら $b - a(>0)$ を投資に回し、 $c(>0)$ を下回ったら $a - c(>0)$ を長期資金から取り崩す、という管理をしている。投資に回すケースと長期資金から取り崩すケースのどちらが多いか、それぞれの割合を計算しなさい。

ヒント：（離散）ランダムウォーク（賭博者の破産問題）の連続化

略解： b あるいは c に達したら a に戻るといふ動きを繰り返す。したがって、長期間観察すると、繰り返し状態 a に戻るので、 a から始めて b か c に到達したら止める、というプロセスを考えたとき、止めたときの状態が b である確率はいくつか、という問題の答えが求めたいものになる。これは離散の場合の賭博者の破産と同じ。したがって、その確率は $(a - c)/(b - c)$ となりそう。

$c < x < b$ から始めて、最初に b, c に到達する時間をそれぞれ T_b, T_c として、

$$w(x) = P(T_b < T_c \mid B(0) = x)$$

と置く。 $w(a)$ が求めたいもの。微少時間の一段階推移解析法を適用する。

$$\begin{aligned} w(x) &= P(T_b < T_c \mid B(0) = x) = E(P(T_b < T_c \mid B(0) = x, B(\Delta t) = x + \Delta X)) \\ &= E(w(x + \Delta X)) \\ &= E\left(w(x) + w'(x)\Delta X + \frac{w''(x)}{2}(\Delta X)^2\right) \\ &= w(x) + \frac{w''(x)}{2}\Delta t \end{aligned}$$

ΔX の期待値は 0、分散は Δt であることを使った。したがって、 $w''(x) = 0$ より、 $w(x)$ は x の一次関数： $px + q$ 。初期条件 $w(b) = 1, w(c) = 0$ を使うと、

$$pb + q = 1, pc + q = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{b - c}, q = -\frac{c}{b - c}$$

以上より、

$$w(x) = \frac{x - c}{b - c}$$

$x = a$ を代入すると、見込み通りの解が得られる。

問題 4.19 現在 100 円の株は 1 ヶ月後に 120 円か 90 円になるものとする。1 ヶ月後にこの株券を 105 円で買うことが出来るコールオプションが 10 円というのは適正価格ですか。金利は 0 とします。

略解：リスク中立確率は $(100 - 90)/(120 - 90) = 1/3$ 、したがって、このコールオプションの価値は

$$\frac{1}{3}(120 - 105) + 0 = 5 < 10$$

10 円は高い。

5 マルコフ連鎖

練習 5.1 マルコフ性を持つならば、現在を挟んで、過去と未来は互いに独立、すなわち

$$P(\text{将来, 過去} \mid \text{現在}) = P(\text{将来} \mid \text{現在})P(\text{過去} \mid \text{現在})$$

が成り立つことを証明しなさい。

略解：

$$\begin{aligned} P(\text{将来, 過去} \mid \text{現在}) &= P(\text{将来} \mid \text{過去, 現在})P(\text{過去} \mid \text{現在}) \\ &= P(\text{将来} \mid \text{現在})P(\text{過去} \mid \text{現在}) \end{aligned}$$

最初の等式は条件付き確率の定義、2 番目の等式はマルコフ性を使っている。

練習 5.2 明日雨が降るかどうかは、今日と昨日の雨降りの様子で決まり、一昨日の天候には影響を受けない、と仮定する。もし、2 日続けて雨降りだったら次の日が雨である確率は 0.8、2 日間とも雨が降らなかったら、次の日に雨が降る確率は 0.2、それ以外の場合は、今日と同じ天気（雨かそうでないか）になる確率が 0.6 とします。このとき、明日と明後日に雨が降る確率はいくつですか。明日と明後日両方とも雨が降らない確率はいくつですか。

略解： X_n は n 日目雨が降れば 1、さもなければ 0 とする確率変数、 $Z_n = (X_{n-1}, X_n)$ とすると、 $\{Z_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ は次のような推移確率を持つマルコフ連鎖になる。2 ステップ推移確率を計算する問題。

$$\begin{aligned} P(Z_{n+1} = (1, 1) \mid Z_n = (1, 1)) &= 1 - P(Z_{n+1} = (1, 0) \mid Z_n = (1, 1)) = 0.8 \\ P(Z_{n+1} = (0, 1) \mid Z_n = (0, 0)) &= 1 - P(Z_{n+1} = (0, 0) \mid Z_n = (0, 0)) = 0.2 \\ P(Z_{n+1} = (1, 1) \mid Z_n = (0, 1)) &= 1 - P(Z_{n+1} = (1, 0) \mid Z_n = (0, 1)) = 0.6 \\ P(Z_{n+1} = (0, 1) \mid Z_n = (1, 0)) &= 1 - P(Z_{n+1} = (0, 0) \mid Z_n = (1, 0)) = 0.4 \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} P(Z_{n+2} = (1, 1) \mid Z_n = (1, 1)) &= 0.8 \times 0.8 \\ P(Z_{n+2} = (1, 1) \mid Z_n = (0, 1)) &= 0.6 \times 0.8 \\ P(Z_{n+2} = (1, 1) \mid Z_n = (1, 0)) &= 0.4 \times 0.6 \\ P(Z_{n+2} = (1, 1) \mid Z_n = (0, 0)) &= 0.2 \times 0.6 \\ \\ P(Z_{n+2} = (0, 0) \mid Z_n = (1, 1)) &= 0.2 \times 0.6 \\ P(Z_{n+2} = (0, 0) \mid Z_n = (0, 1)) &= 0.4 \times 0.6 \\ P(Z_{n+2} = (0, 0) \mid Z_n = (1, 0)) &= 0.6 \times 0.8 \\ P(Z_{n+2} = (0, 0) \mid Z_n = (0, 0)) &= 0.8 \times 0.8 \end{aligned}$$

練習 5.3 P をマルコフ連鎖の推移確率行列とする。もし P^r の各要素がすべて正となるような番号 r があったとすると、 r より大きなすべての数 n に対して P^n の各要素もすべて正となることを示しなさい。

略解：任意の $n > r$ に対して

$$p_{ik}^{(n)} = p_{ik}^{(r+n-r)} = \sum_j p_{ij}^{(n-r)} p_{jk}^{(r)}$$

なので、 $p_{jk}^{(r)} > 0 (\forall j, k)$ ならば、 $\sum_j p_{ij}^{(n-r)} = 1$ となることから少なくとも一つの $p_{jk}^{(r)}$ の係数はゼロでない、したがって、 $p_{ik}^{(n)} > 0$ が言える。

練習 5.4 2 状態のマルコフ連鎖の推移確率行列が次のように書き換えられることを示しなさい。

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-a-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

略解： P の固有値は $1, 1-a-b$ である。それらに対応する固有ベクトルを計算すればよい。

$$Px_i = \lambda_i x_i \quad i = 1, 2$$

とすると、

$$P \times (x_1, x_2) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow P = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} (x_1, x_2)^{-1}$$

固有値 1 に対する右固有ベクトル x_1 は $(1, 1)^t$ 、固有値 $1-a-b$ に対する右固有ベクトル x_2 は $(-a, b)^t$ 。したがって、与式ようになる。

練習 5.5 2 状態の推移確率行列が以下の式で与えられているものとします。

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

このとき、 n ステップ推移確率を p で表しなさい。

略解： $a = b = p$ として、前の問題に代入するだけ。

$$P = \frac{1}{2p} \begin{pmatrix} 1 & -p \\ 1 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-2p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & p \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

なので、

$$P^n = \frac{1}{2p} \begin{pmatrix} 1 & -p \\ 1 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-2p)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & p \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

あるいは、

$$\begin{aligned} p_{00}^{(n)} &= 0.5 + 0.5(1-2p)^n \\ p_{10}^{(n)} &= 0.5 - 0.5(1-2p)^n \end{aligned}$$

練習 5.6 ギャンブラーの破産モデルの状態推移図を描きなさい。適当な仮定の下で推移確率行列を書きなさい。

略解：

練習 5.7 部品取り替えモデルのサンプルパスを描きなさい。部品の寿命の確率関数が $\{0.1, 0.2, 0.3, 0.4\}$ と与えられているとき、推移確率行列を書きなさい。ただし、0.1 とは取り替えて、次の点検時に不良状態が見つかる確率が 0.1 である、というように読むことにします。

略解：点検直後の部品の年齢（取り替えてからの経過日数）を X_n とすると、 $\{X_n\}$ はマルコフ連鎖になる。取り替えてから 4 回目の点検までには必ず取り替えることになるので、取り得る状態は 0, 1, 2, 3 の 4 通り。推移確率は、点検時に取り替えなかったとすると、その年齢まで故障が

なかったという条件の下で、次の取り替えまでに故障が起きる確率なので、確率関数の値ではなく、条件付き確率を使わなければいけない

$$p_{0,1} = 0.9, p_{1,2} = \frac{0.7}{0.9}, p_{2,3} = \frac{0.4}{0.7}$$

0 列は $p_{i,0} = 1 - p_{i,i+1} (i = 0, 1, 2), p_{3,0} = 1$ 、それ以外は全て 0。

練習 5.8 次の推移確率行列で定義されるマルコフ連鎖が周期 2 を持つ周期的連鎖であることを示しなさい。また、状態 0 の再帰時間の分布を計算しなさい。

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-p \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

略解： $X_0 = 0$ とすると、 $X_{2n+1} \neq 0, X_{2n} = 0$ 、したがって、 $p_{00}^{(k)} > 0$ となる推移回数 k の集合は周期 2 を持つ。従って、状態 0 の周期は 2。この連鎖は再帰的なので、マルコフ連鎖が周期 2 と言って良い。再帰時間は必ず 2 なので、再帰時間を $T(0)$ とすると

$$P(T(0) = 2) = 1$$

(状態推移図を描いて、明らかに周期 2、というのは答えになっていない)

練習 5.9 練習 5.8 の平均再帰時間を計算しなさい。

略解：状態 0 の平均再帰時間は 2。状態 1 の再帰時間 $T(1)$ は

$$P(T(1) = 2) = p, P(T(1) = 4) = (1-p)p, P(T(1) = 6) = (1-p)^2 p, \dots$$

なので、 $T(1)/2$ がパラメータ p の幾何分布となり、 $T(1)$ の平均再帰時間は $2/p$ 。同様に考えて、状態 2 の再帰時間 $T(2)$ の期待値は $2/(1-p)$

練習 5.10 状態が再帰的ならばその状態の生涯訪問回数は無限になることをわかりやすく説明しなさい。

略解：再帰的ならば確率 1 で自分自身へ戻ってくる。生涯訪問回数が有限だとすると、「最後の」訪問時点があり、その後の推移が再帰性の定義を満たさなくなる。

あるいは、生涯訪問回数を N とする。再帰的なので、ある時点で必ずその状態へ戻る。その時点を経験点としたならば、そこから数えて N 回戻ってくるができる。最初の原点から数えたときは、その N に (1 回戻ってきたのだから) 1 を加えて $N+1$ 回戻ると言ってもよい。そうすると $N = N+1$ となって、 $N = \infty$ でなければならない (何が分かりやすいか、人によって異なるが、この場合は、式を持ち出すよりはこの方がわかりやすい?)。

練習 5.11 状態 k に初めて戻るまでの推移数を $T(k)$ としたとき、次の式が成り立つことを示しなさい。

$$P(X_n = k | X_0 = k) = \sum_{m=1}^n P(X_{n-m} = k | X_0 = k) P(T(k) = m | X_0 = k)$$

略解：すべてのサンプルパスは最初に k に戻る時点の値によって層別される。従って、全確率の公式を適用できる。

$$P(X_n = k | X_0 = k) = \sum_{m=1}^n P(X_n = k | X_m = k) P(T(k) = m | X_0 = k)$$

練習 5.12 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{kk}^{(n)}$ が状態 k の生涯訪問回数の期待値であることを示しなさい。

略解： $X_0 = k$ という条件の下で、 $X_n = k$ ならば $Z_n = 1$ 、さもなければ $Z_n = 0$ という確率変数を定義すると、 $\sum_n Z_n$ は状態 k の生涯訪問回数。その期待値は

$$E\left(\sum_{n=0}^{\infty} Z_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(Z_n = 1) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_n = k | X_0 = k)$$

練習 5.13 左右対称なランダムウォークで $n \gg 1$ のとき、スターリングの公式を適用して $p_{00}^{(2n)} \approx (n\pi)^{-0.5}$ が成り立つことを示しなさい。

略解：4章の問題

練習 5.14 2状態のマルコフ連鎖で、既約でないモデル、非周期的でないモデル、再帰的でないモデルを作り、それぞれ極限確率が存在しないことを確かめなさい。

略解：

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

P_1 は可約連鎖の例、 P_2 は周期的連鎖の例、いずれも初期状態の影響を最後まで受けるので、極限分布は存在しない。再帰的でない場合、一時的と吸収的状態が一つずつになるので、極限確率は存在する。「再帰的でないモデルの極限確率の極限確率が存在しない」というのは間違い。

練習 5.15 推移確率行列が2重確率行列であるとは、各列の要素の和が1になっていること、すなわち、下の式が成り立つことを言います。

$$\sum_j p_{jk} = 1$$

このような推移確率行列を持つ連鎖が既約で非周期的ならば、その状態数を M としたとき、極限分布が以下で与えられることを示しなさい。

$$\pi_k = \frac{1}{M}, \quad k = 1, 2, \dots, M$$

略解：推移確率行列が2重確率行列ならば、 n ステップ推移確率行列もそう。

$$\sum_i p_{ik}^{(n)} = 1$$

$n \rightarrow \infty$ とすれば、 $p_{ik}^{(n)} \rightarrow \pi_k$ となるので、極限分布は一様分布

練習 5.16 粒子が円周上に並んだ5点の間を行ったり来たりするものとする。5つの点は時計回りに $0, 1, 2, 3, 4$ という番号が付けられているものとする。1回につき、確率 p で右へ（時計回り）、 $1-p$ で左へ（反時計回り）動くものとする。 X_n を n 回目の移動の後の粒子の位置を表すものとする、 $\{X_n, n \geq 0\}$ はマルコフ連鎖になります。

- (1) 推移確率行列を求めなさい。
- (2) 極限確率を計算しなさい。

略解：(1)

$$p_{j, (j+1 \bmod 5)} = 1 - p_{j, j-1 \bmod 5} = p$$

ただし、 $(n \bmod 5)$ は n が正整数ならば 5 で割ったあまり、 n が負の整数ならば、絶対値を 5 で割ったあまりを 5 から引いたものとする。

(2) 一般論から、どの状態も 5 分の 1

練習 5.17 次の推移確率行列を持つマルコフ連鎖の定常分布を計算しなさい。

$$P_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}, P_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & p & 1-p \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

略解：

$$P_1 : \left(\frac{5}{9}, \frac{3}{9}, \frac{1}{9} \right), P_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{p}{2}, \frac{1-p}{2} \right)$$

練習 5.18 Excel を使って、次の推移確率行列を持つマルコフ連鎖の極限分布を計算しなさい。

また、定常方程式を解いて、それが極限分布と一致することを確認しなさい。

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.99 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.99 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.99 & 0.01 \\ 0.01 & 0 & 0 & 0.99 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.69 & 0.3 & 0 & 0.01 \end{pmatrix}$$

略解： P_1 は「ほとんど動かない」連鎖、 P_2 は「ほとんど周期的」な連鎖、いずれの場合もわずかずつでも乱す動きがある（結局は既約、非周期的）と P^n は同じ行ベクトルが並ぶようになる、という例。 P_1 は 1024 ステップ以上、2048 ステップ以内に一様分布に収束、 P_1 は 2048 ステップ以上、4096 ステップ以内に次のベクトルに収束

$$P_2 : (0.265687467, 0.232835043, 0.205979489, 0.295498001)$$

練習 5.19 従業員が N 人いる企業で、個々の従業員は三つのジョブクラスに分かれていて、クラス間をマルコフ連鎖にしたがってたがいに独立に移動しているものとする。その推移確率行列は次で与えられているものとする。

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$$

N は十分に大きいものとして、各クラスの従業員数の比率を計算しなさい。

略解：平衡方程式を解けばよい

$$\pi_0 = 0.353, \pi_1 = 0.412, \pi_2 = 0.235$$

練習 5.20 道路を走っているトラックの後ろを走っている車は 4 台中 3 台は普通の乗用車、乗用車の後ろを走っている車は 5 台中 1 台がトラックであった。走っている乗用車とトラックの割合はどれくらいと考えればよいか。

略解： X_n と X_{n+1} をセットで状態としたときにマルコフ連鎖が構成できるので、その定常分布を計算しなさい、という問題。

練習 5.21 ある町では 2 日と続けて晴れたことがない。天気の種類は晴れ、曇り、雨の 3 通りとする。晴れの日次は曇りと雨が等確率で起き、曇り、雨の次の日は 2 分の 1 の確率で前日と同じ天気となり、天気が変わるとすれば残りの二つの可能性が等確率で起きるといふ。曇りの比率はどれくらいですか。

略解：晴れ (F)、曇り (C)、雨 (R) の間の推移確率は次のように与えられている。

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} F & C & R \end{matrix} \\ \begin{matrix} F \\ C \\ R \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

したがって、その定常確率は $P(F) = 0.2, P(C) = P(R) = 0.4$

練習 5.22 定常分布が存在すると、任意の状態集合 A に対して、次の等式が成り立つことを説明しなさい。

$$\sum_{i \in A} \sum_{k \in A^c} \pi_i p_{ik} = \sum_{i \in A^c} \sum_{k \in A} \pi_i p_{ik}$$

略解：

$$\sum_{i \in A} \sum_{k \in A^c} \pi_i p_{ik} = \sum_{i \in A} \pi_i - \sum_{i \in A} \sum_{k \in A} \pi_i p_{ik} = \sum_{i \in A} \sum_j \pi_j p_{ji} - \sum_{i \in A} \sum_{k \in A} \pi_i p_{ik} = \sum_{i \in A^c} \sum_{k \in A} \pi_i p_{ik}$$

練習 5.23 次の推移確率行列を持つ吸収的マルコフ連鎖で、状態 1 から出発して状態 0 に吸収される確率を逐次推移解析法を用いて計算しなさい。

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q & 1-p-q & p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

略解：状態 0 に吸収される確率を r とすると、逐次推移解析法で

$$r = q + (1-p-q)r \Leftrightarrow r = \frac{q}{p+q}$$

状態 1 から離れるという条件のもとで、状態 0, 2 に推移するしやすさは $q : p$ になるということを表している。

練習 5.24 推移確率行列が以下のように与えられるマルコフ連鎖を考える。ただし、 Q は m 次正方行列、 I は k 次単位行列とする。このとき、 P^n を計算しなさい。

$$P = \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

略解：

$$P^n = \begin{pmatrix} Q^n & R_n \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

ただし、

$$R_2 = QR + R, R_3 = Q^2R + QR + R, \dots, R_n = \sum_{k=0}^{n-1} Q^k R$$

練習 5.25 (数学の問題) 正方行列 Q で、各要素は非負、行和が 1 以下で少なくとも行和が 1 未満の行があるようなものとする。このとき、 $I + Q + Q^2 + Q^3 + \dots$ の逆行列が $(I - Q)^{-1}$ であることを示しなさい。

略解：

$$(I + Q + Q^2 + Q^3 + \dots + Q^n)(I - Q) = I - Q^{n+1}$$

Q の絶対値最大の固有値は 1 より小さいので、 Q^n は O 行列に収束する。したがって、 $I + Q + Q^2 + Q^3 + \dots$ は $I - Q$ の逆行列である

練習 5.26 勝つ確率が p の賭を繰り返し行う。最初に与えられたチップは 1 枚、相手は 2 枚、毎回チップを 1 枚ずつ賭けて、勝った方が場の 2 枚のチップを獲得する。で、どちらかのチップが無くなったら 1 回の勝負が終わり、3 枚のチップを集めた方が相手から A 円受け取る。この勝負を倦まず弛まず続けるものとする。

(0) 自分のチップの枚数の変化をサンプルパスで表しなさい。また、累積獲得賞金額のサンプルパスを描きなさい。

- (1) 1 回の勝負で自分が勝つ確率を計算しなさい。
- (2) 1 回の勝負が付くまでに行う賭の回数を計算しなさい (分布と平均)。
- (3) 1 回の勝負で自分が獲得する賞金の期待値を計算しなさい。
- (4) 賭が公平であるためには勝つ確率が p をいくつにすればよいですか。
- (5) 勝つ確率 p が 2 分の 1、つまり、ゆがみのないコインを使って賭をするものとします。このとき、1 回コインを投げる毎に、平均いくら損することになりますか。

略解：「 A 円獲得する」とあるだけで、負けた場合の損が指定されていない。「負けたら相手が A 円獲得する」というように問題を補足する。

(0) 勝負中のチップの枚数は、1 と 2 を交互に繰り返して、0 へ吸収されるか、3 へ吸収されるまで続く。累積獲得賞金額のサンプルパスは、勝負に勝ったとき A 増え、負けたら A 減る、という、1 回の変化が A のランダムウォークのようになる。

- (1) チップの枚数が i という状態から賭に勝つ確率を π_i とすると、

$$\begin{cases} \pi_1 = p\pi_2 \\ \pi_2 = (1-p)\pi_1 + p \end{cases} \Rightarrow \pi_1 = \frac{p^2}{1-p+p^2}, \pi_2 = \frac{p}{1-p+p^2}$$

- (2) 決着が付くまでの勝負の回数を T とすると、

$$\begin{aligned} P(T > 2n) &= (p(1-p))^n \\ P(T > 2n+1) &= p(p(1-p))^n \end{aligned}$$

従って、平均は

$$\sum_{n=0}^{\infty} (p(1-p))^n + \sum_{n=0}^{\infty} p(p(1-p))^n = \frac{1}{1-p+p^2} + \frac{p}{1-p+p^2} = \frac{1+p}{1-p+p^2}$$

あるいは、

$$E(T|X_0=1) = 1 + p \times E(T|X_0=2) = 1 + p + p(1-p) \times E(T|X_0=1)$$

から導いても良い。

- (3) 期待値は

$$A\pi_1 - A(1-\pi_1) = A \left(\frac{2p^2}{1-p+p^2} - 1 \right) = A \frac{p^2+p-1}{1-p+p^2}$$

- (4) 公平であるためには

$$\pi_1 = 0.5 \Leftrightarrow p = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618$$

(5)(3) を (2) で割ったもの、それに $p = 0.5$ を代入すればよい。損失額だから、その符号を反転する。

$$-\frac{A(p^2+p-1)}{1+p} = \frac{A}{6}$$

練習 5.27 状態が $0, 1, \dots, N$ の既約なマルコフ連鎖を考える。

- (1) 状態 j から出発して、いつかは状態 k を訪問する確率はいくつですか。それはなぜですか。
- (2) 状態 j から出発したという条件の下で、状態 0 を訪問する前に状態 N を訪問する確率を x_j としたとき、 $x_j, j = 0, 1, \dots, N$ が満たす連立方程式を導きなさい。
- (3) もし $\sum_k k p_{jk} = j, j = 1, 2, \dots, N-1$ ならば、(2) の解は $x_k = k/N$ と表されることを証明しなさい。

略解：(1) 「既約」ということは、お互いに訪問できるということ、したがって、答えは 1

(2) 状態 $0, N$ を吸収状態とするマルコフ連鎖を考え、先に状態 N に吸収される確率を計算すればよい。

$$\begin{aligned} x_i &= P(X_\infty = N | X_0 = i) = \sum_{k=0}^N P(X_\infty = N, X_1 = k | X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} p_{ik} x_k + p_{iN} \quad (j = 1, 2, \dots, N-1) \\ x_0 &= 0, x_N = 1 \end{aligned}$$

(3) $x_k = k/N$ を代入すると左辺イコール右辺になるので、とりあえずは解の候補。それしかないことを示す必要がある。状態 $0, N$ を取り去った推移確率行列を Q とすると、 $(I - Q)^{-1}$ は状態 $0, N$ を吸収状態と考えた吸収的マルコフ連鎖の基本行列になり、それを使って $\{x_k\}$ ベクトルは一意に表現できることが分かっている。したがって、解があれば一意解。

練習 5.28 インフルエンザの感染モデル。 n_0 個の赤い玉と、 $N - n_0$ 個の白い玉を用意します。ランダムに二つの玉を取り出し、二つの玉の色が同じならばそのまま元に戻し、さもなければ、確率 q で白い玉を赤く塗り替えて元に戻すものとします。言うまでもなく、赤い玉が感染者を表し、二つの玉を取り出すことはランダムに 2 人が会合することを表し、色を塗り替えるということはある確率で感染するというを表しています。 n_0 は最初の保菌者の数を表します。 X_n を n 回の試行後の赤い玉の個数を表すものとする、 $\{X_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$ は吸収的マルコフ連鎖になることを示し、 $X_0 = 1$ から始めて全員が感染するまでに何ステップかかるか計算しなさい。

略解：状態は 1 から N までの整数、 N 未満の場合は確率的に状態が同じか 1 増加する、という推移を繰り返すので一時的、いつかは状態 N に吸収される。

推移確率は

$$p_{i,i+1} = 1 - p_{ii} = 2q \frac{i(N-i)}{N(N-1)} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1)$$

状態 i の訪問回数はパラメータ $p_{i,i+1}$ の幾何分布に従うので、その平均滞在時間は $p_{i,i+1}^{-1}$ 、したがって、状態 1 から出発して吸収されるまでの平均推移回数は次の通り

$$\sum_{i=1}^{N-1} \frac{N(N-1)}{2q} \frac{1}{i(N-i)} = \frac{N-1}{2q} \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{N-i} \right) = \frac{N-1}{q} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{i}$$

練習 5.29 $E(X_n) = E(Y)^n$ となることを証明し、 $P(Y = 0) = p, P(Y = 1) = 0.5, P(Y = 2) = 0.5 - p (0 < p < 0.5)$ のとき、いろいろな p の値に対して $E(X_5), E(X_{10}), E(X_{20})$ を Excel を使って計算しなさい。

略解：

$$\begin{aligned} E(X_n) &= E(E(X_n | X_{n-1})) = E(X_{n-1} \times E(Y)) = E(X_{n-2})E(Y)^2 \\ &= \cdots = E(Y)^n \end{aligned}$$

$P(Y=0)=p, P(Y=1)=0.5, P(Y=2)=0.5-p (0 < p < 0.5)$ ならば

$$E(Y) = 0.5 + 2(0.5 - p) = 2(0.75 - p)$$

したがって、 $p = 0.25$ を境に単調減少から単調増加に変わる。

練習 5.30 $P(Y=0)=0.25, P(Y=2)=0.75$ のとき、 $n=1, 2, 3, 4$ 世代目の絶滅確率を計算しなさい。

略解： $\alpha_0 = 1$

$$\alpha_n = 0.25 + 0.75\alpha_{n-1}^2$$

を計算すればよい。 $\alpha_1 = 0.25, \alpha_2 = 0.29688, \alpha_3 = 0.3161, \alpha_4 = 0.32494$

練習 5.31 (1) $P(Y=0)=0.25, P(Y=2)=0.75$ のとき、絶滅確率はどうなるか予想しなさい。 $\alpha = G_Y(\alpha)$ を解いて $0 < \alpha^* < 1$ の根があれば求めなさい。予想通りでしたか。

(2) $P(Y=0)=0.75, P(Y=2)=0.25$ のとき、絶滅確率はどうなるか予想しなさい。 $\alpha = G_Y(\alpha)$ を解いて $0 < \alpha^* < 1$ の根があれば求めなさい。予想通りでしたか。

(3) $G'_Y(1) > 1$ ならば絶滅確率は 1 より小さく、 $G'_Y(1) \leq 1$ ならば確実に絶滅する、ということを示しなさい。これが何を意味するのかを説明しなさい。

略解：(1) $E(Y) > 1$ なので、絶滅確率は 1 未満であろう。どれくらいになるか、直前の練習問題から 0.35 くらいか。方程式

$$0.25 + 0.75z^2 = z$$

の解は $1/3$ 。

(2) $E(Y) < 1$ なので、絶滅確率は 1 となるはず。 $G_Y(z) = 0.75 + 0.25z^2$ のグラフは単調増加で、 $z=1$ での接線の傾きが 0.5、などから、 $0 < \alpha^* < 1$ の根は存在しない、ということは絶滅確率は 1、予想通り。

(3) $G'_Y(1) > 1$ ならば 1 未満の不動点が存在するため、絶滅確率（その不動点の値）は 1 未満。さもなければ、不動点は 1 だけなので、絶滅確率は 1。 $G'_Y(1)$ は一つの個体が残す子孫の数の期待値に等しいから、絶滅確率が 1 か、それ未満かは、子孫の数の期待値に依存して決まる、ということを表している。

練習 5.32 $P(Y=0)=0.25, P(Y=2)=0.75$ のとき、 X_n の期待値と分散を計算しなさい。

略解： X_n の期待値、分散はテキストの式を使う。 $E(Y) = 1.5, V(Y) = 0.75$

$$E(X_n) = m^n = 1.5^n$$

$$V(X_n) = 0.75 \times 1.5^{n-1} \frac{1.5^n - 1}{1.5 - 1} = 1.5^n (1.5^n - 1)$$

演習問題

問題 5.1 繰り返し試行で、成功する確率が過去 2 回の試行で成功する回数を k としたとき $(k+1)/(k+2)$ であるようなものを考える。このとき、無限の試行を繰り返したとき、ある試行

で成功する確率を計算するためのマルコフモデルを考えなさい。

略解： X_n は n 回目の試行が成功したとき 1，さもなければ 0 とする確率変数で、 $Z_n = (X_{n-1}, X_n)$ とすると、 $\{Z_n\}$ はマルコフ連鎖になる。その推移確率行列は

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (0,0) \\ (0,1) \\ (1,0) \\ (1,1) \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

問題 5.2 状態が $0, 1, 2$ の確率過程 $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ を考えます。状態の推移に関して、次の式が成り立つものとします。

$$P\{X_{n+1} = k \mid X_n = j, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0\} = \begin{cases} p_{jk}^I & n \text{ が偶数の場合} \\ p_{jk}^{II} & n \text{ が奇数の場合} \end{cases}$$

ただし、 $\sum_{k=0}^2 p_{jk}^I = \sum_{k=0}^2 p_{jk}^{II} = 1, j = 0, 1, 2$ 。このとき、 $\{X_n; n \geq 0\}$ はマルコフ連鎖ですか。もしそうでないとしたら、状態を工夫する（過去の履歴を取り込む）ことでマルコフ連鎖を作り出すことができますか。

略解： $P^I = (p_{jk}^I), P^{II} = (p_{jk}^{II})$ として、

$$P = \begin{pmatrix} O & P^I \\ P^{II} & O \end{pmatrix}$$

を推移確率行列とするマルコフ連鎖を考える。

問題 5.3 m 個の遺伝子グループを考える。ここの遺伝子は二つのタイプのいずれかである。ある代で j 個の遺伝子が I 型だったとして、次の世代で I 型遺伝子の個数が k 個になる確率は以下の式で与えられるものとする。

$$\binom{m}{k} \left(\frac{j}{m}\right)^k \left(\frac{m-j}{m}\right)^{m-k}, \quad k = 0, 1, \dots, m$$

確率変数 X_n を n 世代目の I 型遺伝子の個数とし、 $X_0 = j$ とする。このとき、 $E(X_n)$ を求めなさい。

略解：問題 5.8 の解答を見よ。

問題 5.4 二つスイッチの状態 on/off の比率を考える。一つのスイッチが n 日目にオンであるという事象はもう一つのスイッチとは独立で、その確率は次の式で与えられるものとする。

$$(n-1 \text{ 日目にオンであったスイッチの個数} + 1) / 4$$

たとえば、 $n-1$ 日目に両方のスイッチがオンならば、 n 日目にオンになる確率は両方のスイッチとも $3/4$ です。このとき、十分に時間が経過したときに両方ともオンである比率は幾つですか。両方ともオフである比率は幾つですか。

略解：現在オンのスイッチの数が分かれば次の日のオンのスイッチの個数は確率的に分かる。実際、現在オンのスイッチの個数を i とすると、次の日にオンであるスイッチの数はパラメータ $2, (i+1)/4$ の 2 項分布に従う。したがって、 n 日目にオンのスイッチの個数を X_n とすれば、 $\{X_n\}$ は 3 状態マルコフ連鎖になり、その推移確率行列は次のようになる。

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{9}{16} & \frac{6}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{16} & \frac{6}{16} & \frac{9}{16} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

EXCEL を使って定常分布を計算すると、 $(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7})$

問題 5.5 先生が生徒に定期的に 3 種類の試験を課している。その評価は「できた」か「できなかった」かのいずれかであるものとする。3 種類の試験ができたと評価される確率はそれぞれ、 $p_1 = 0.3, p_2 = 0.6, p_3 = 0.9$ であるという。前回の試験ができたとすると、次の試験は 3 種類から等確率で選ばれた問題が出題される。もしできなかったとすると問題 1 が出題される。問題 1, 2, 3 が出題される比率を計算しなさい。

略解： $P(X_{n+1} = 1 | X_n = i)$ は「問題 i が不正解か $(1 - p_i)$ 正解で次に問題 1 を選ぶ」確率 $(\frac{p_i}{3})$ に等しい。 $P(X_{n+1} = j (\neq 1) | X_n = i)$ は「問題 i に正解し、次に問題 j を選ぶ確率に等しい $(\frac{p_i}{3})$ 」に従って

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

問題 5.6 積み上げられた n 枚のカードの中から等確率で 1 枚のカードを選んで一番上にのせる、という並べ替えを繰り返すものとする。無限に繰り返すと、カードの並び順はまったくランダムになる、すなわち、 n 枚の可能な並べ方 $n!$ 通りの中からランダムに選ばれた並び方を同じになることを直感的に説明しなさい。

略解：任意の 2 枚の上下関係を調べれば良い。最初の位置関係がどうであれ、どちらのカードも選ばれるチャンスは平等で、無限に繰り返せば必ず一度以上選ばれるチャンスがある。したがって十分に試行が繰り返された後で、2 枚のカードのどちらが他方より上にある確率は 2 分の 1。

問題 5.7 n 個の異なった要素からなるリストがあり、 k 番目の要素が参照される確率は p_k と与えられている。参照された要素はリストの先頭に戻される。 n 個の要素の並び順をシステムの状態とすると、状態の数は全部で $n!$ 通りある。

(1) この状態の推移はマルコフ性があることを説明しなさい。

(2) $k_1, k_2, \dots, k_n$ を $1, 2, \dots, n$ の任意の置換とし、 $\pi(k_1, k_2, \dots, k_n)$ を極限確率とする。状態が $k_1, k_2, \dots, k_n$ ということは、直前に参照された要素は k_1 、 k_1 を除いた $n - 1$ 個の要素の中で最も最近参照されたのは k_2 、その二つを除いた中でもっとも最近参照された要素は k_3 、という履歴をたどったということの意味する。このことから、状態確率は直感的に以下の式で表されられると思われる。

$$\pi(k_1, k_2, \dots, k_n) = p_{k_1} \frac{p_{k_2}}{1 - p_{k_1}} \frac{p_{k_3}}{1 - p_{k_1} - p_{k_2}} \cdots \frac{p_{k_{n-1}}}{1 - p_{k_1} - \cdots - p_{k_{n-2}}}$$

$n = 3$ のときにこの極限確率が確かに正しいことを証明しなさい。

略解： $n = 3$ の場合について全部書いてみれば分かる。その規則性を見つけて一般の場合に拡張する。

(1) 1 回の推移で、順番が変わるかもしれないのは先頭以外の要素が参照される場合のその要素から先頭までの要素番号で、相対的順序は新たに先頭にきた要素以外は直前の順序を守っている。つまり、1 回の推移で使われる情報は直前の並び順だけ。したがって、 n 回推移後の状態が分かれば、次の n 通りの可能な推移は $\{p_i\}$ だけで決まり、過去の推移には関係しない、という意味でマルコフ性が成り立つ。

(2) 平衡方程式は

$$\pi(k_1, k_2, k_3) = p_{k_1} \pi(k_1, k_2, k_3) + p_{k_1} \pi(k_2, k_1, k_3) + p_{k_1} \pi(k_2, k_3, k_1)$$

両辺の $\pi(\dots)$ に解を代入して、左辺 = 右辺が成り立つことを示せばよい。解があれば一意なので。右辺は

$$p_{k_1} \left(\frac{p_{k_1} p_{k_2}}{1 - p_{k_1}} + \frac{p_{k_1} p_{k_2}}{1 - p_{k_2}} + \frac{p_{k_2} p_{k_3}}{1 - p_{k_2}} \right) = \frac{p_{k_1} p_{k_2}}{1 - p_{k_1}} = \pi(k_1, k_2, k_3)$$

あるいは、 $n = 3$ ならば状態は全部で 6 通り：123, 132, 213, 231, 312, 321、全部リストアップして平衡方程式が成り立つことを示せばよい。推移確率行列は

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_2 & 0 & p_3 & 0 \\ 0 & p_1 & p_2 & 0 & p_3 & 0 \\ p_1 & 0 & p_2 & 0 & 0 & p_3 \\ p_1 & 0 & 0 & p_2 & 0 & p_3 \\ 0 & p_1 & 0 & p_2 & p_3 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & p_2 & 0 & p_3 \end{pmatrix}$$

この行列を使って、

$$\begin{aligned} \pi(123) &= p_1 \frac{p_2}{1 - p_1}, \pi(132) = p_1 \frac{p_3}{1 - p_1} \\ \pi(213) &= p_2 \frac{p_1}{1 - p_2}, \pi(231) = p_2 \frac{p_3}{1 - p_2} \\ \pi(312) &= p_3 \frac{p_1}{1 - p_3}, \pi(321) = p_3 \frac{p_2}{1 - p_3} \end{aligned}$$

が平衡方程式を満たすことを確かめればよい。

例えば、最初の式は

$$p_1 \pi(123) + p_1 \pi(213) + p_1 \pi(231) = p_1 p_2 \left(\frac{p_1}{1 - p_1} + 1 \right) = \frac{p_1 p_2}{1 - p_1} = \pi(123)$$

など。

問題 5.8 m 個の遺伝子グループを考える。ここの遺伝子は二つのタイプのいずれかである。ある代で j 個の遺伝子が I 型だったとして、次の世代で I 型遺伝子の個数が k 個になる確率は以下の式で与えられるものとする。

$$\binom{m}{k} \left(\frac{j}{m} \right)^k \left(\frac{m-j}{m} \right)^{m-k}, \quad k = 0, 1, \dots, m$$

確率変数 X_n を n 世代目の I 型遺伝子の個数とし、 $X_0 = j$ とする。このとき

- (1) $E(X_n)$ を求めなさい。
- (2) すべての遺伝子が I 型になってしまう確率はいくつですか。

略解：(1) $X_{n-1} = j$ としたときの X_n はパラメータ $m, j/m$ の 2 項分布なので、期待値は X_n に等しい。

$$E(X_n) = \sum_j E(X_n | X_{n-1} = j) P(X_{n-1} = j) = E(X_{n-1})$$

これを繰り返せば、 $E(X_n) = E(X_0)$

- (2) 求めたいものは

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = m | X_0 = j)$$

状態 0 と状態 m は吸収状態なので、 n が十分に大きければ

$$E(X_n | X_0 = j) \approx 0 \times P(X_n = 0 | X_0 = j) + m \times P(X_n = m | X_0 = j)$$

したがって、

$$P(X_n = m \mid X_0 = j) \approx \frac{j}{m}$$

$X_n = i \neq 0, m$ のとき、 $X_\infty = m$ となる確率を θ_i とすると、

$$\theta_i = \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m}{k} \left(\frac{i}{m}\right)^k \left(\frac{m-i}{m}\right)^{m-k} \theta_k + \left(\frac{i}{m}\right)^m$$

試しに $\theta_k = k/m$ を代入してみると、右辺は

$$\sum_{k=1}^{m-1} \binom{m-1}{k-1} \left(\frac{i}{m}\right)^k \left(\frac{m-i}{m}\right)^{m-k} + \left(\frac{i}{m}\right)^m = \frac{i}{m}$$

問題 5.9 投票（開票）問題という有名な問題があります。市長の信任投票を行ったら a 票対 b 票で信任された、つまり $a > b$ 、ということが神様には分かっています。このとき、一票ずつ開票するものとして、信任票が常にリードをし続けて全投票の開票を終える確率を計算しなさい。例えば、 $a = 2, b = 1$ ならば、（ A を信任とすると）開票順は AAA^c, AA^cA, A^cAA の 3 通りで、条件を満たすのは一通りだから、答えは 3 分の 1。

略解： n 票開票後の信任得票数から不信任得票数を引いたものを S_n とすれば、 $S_0 = 0, S_{a+b} = a - b$ という条件の下で、 $S_n > 0 (1 \leq n < a + b)$ であり続ける確率を計算する問題。 $(0, 0)$ から $(a + b, a - b)$ へ到達するパスの内条件を満たすパスの相対本数が求めるものになる。最初の開票結果は A でなければいけない。したがって、条件を満たすパスは必ず $S_1 = 1$ 、あとは $(1, 1)$ から $(a + b, a - b)$ へ到達するパスの中で原点に戻らないパスを数えればよい。

「... しないパスの本数」は「... するパスの本数」を数える問題に置き換えると分かりやすい。 $(1, 1)$ から $(a + b, a - b)$ へ到達するパスの中で原点に戻るパスの本数は「鏡像の原理」という至極当然の考え方を適用することにより、 $(1, -1)$ から $(a + b, a - b)$ へ（無条件で）到達するパスの本数と等しいことが言える。なぜならば、 $(1, 1)$ から $(a + b, a - b)$ へ到達するパスの中で原点に戻るパスについて、最初に原点へ戻る推移の回数を n とすると、 $\{-S_1 (= -1), -S_2, \dots, -S_n (= 0), S_{n+1}, \dots, S_{a+b}\}$ というパスは $(1, -1)$ から $(a + b, a - b)$ へ到達するパスになっている。つまり、「 $(1, 1)$ から $(a + b, a - b)$ へ到達するパスの中で原点に戻るパス」と「 $(1, -1)$ から $(a + b, a - b)$ へ到達するパス」は 1 対 1 に対応している。したがって、「 $(1, 1)$ から $(a + b, a - b)$ へ到達するパスの中で原点に戻るパス」の本数と「 $(1, -1)$ から $(a + b, a - b)$ へ到達するパス」の本数は等しい。これが鏡像の原理。

したがって、リードし続けるパスの本数は「 $(1, 1)$ から $(a + b, a - b)$ へ到達するパス」の本数から「 $(1, -1)$ から $(a + b, a - b)$ へ到達するパス」の本数を引いたものに等しいので、求めたい確率は

$$\frac{\binom{a+b-1}{a-1} - \binom{a+b-1}{a}}{\binom{a+b}{a}} = \frac{a-b}{a+b}$$

問題 5.10 $2n$ 回勝負して、途中、勝ち数が常に負け数を上回っていながら最後に引き分けで終わる確率 w_{2n} が次の式で与えられることを証明しなさい。

$$w_{2n} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{4n} u_{2n-2}$$

（ヒント）条件に当てはまるパスは、点 $(1, 1)$ から点 $(2n-1, 1)$ を経由し、時点 2 から時点 $2n-2$ までは 0 という状態を取ることはできません。状態 0 を通るパスの本数は鏡像の原理によって数えることが出来ませんか。

略解：ヒントに従い、 $(1, 1)$ から点 $(2n-1, 1)$ に至るパスの本数の中で、原点を通らないパスの本数を数える。上の問題同様、これは鏡像の原理から、

$$\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n-2} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-2}$$

と計算できるので、求めたい確率は

$$w_{2n} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-2} 2^{-2n} = \frac{1}{4n} \binom{2n-2}{n-2} 2^{-2n+2} = \frac{1}{4n} u_{2n-2}$$

問題 5.11 $2n$ 回勝負して、途中、負け越さずに最後に引き分けで終わる確率が $4w_{2n+2}$ で与えられることを説明しなさい。

略解： $2n+2$ 回勝負して、途中、勝ち数が常に負け数を上回っていながら最後に引き分けで終わる確率は w_{2n+2} 。その履歴は必ず $(1, 1), (2n+1, 1)$ を通るはず。(最初の勝ちを忘れて) その $2n$ 回の勝負だけを取り出してみれば、ちょうど問題の状況になる。したがって、 w_{2n+2} から最初と最後の勝負の確率 4 分の 1 を取り去ったもの、つまり割ったもの、あるいは 4 を掛けたもの、が問題の答えになる。

問題 5.12 $2n$ 回勝負して最終結果は引き分けだったとき、途中正の領域にある比率が m/n である(条件付き)確率は、 $m = 0, 1, \dots, n$ で一定であることを証明しなさい。したがって、たとえば、すべて正の領域で勝負を終える確率は $\frac{1}{n+1}$ で与えられます。

(ヒント) $p_m(n)$ と同じように考えればよい。最終結果は引き分けで、途中正の領域にある比率が m/n である確率を $q_m(n)$ と書くことにすると、最初に状態 0 に戻る時点で分類した全確率の公式を適用した $q_m(n)$ に関する漸化式を導くことが出来るはずです。あとは数学的帰納法。

略解：ヒントにしたがって、最終結果は引き分けで、途中正の領域にある比率が m/n である確率を $q_m(n)$ と書くことにすると、帰納法の仮定は

$$q_m(n) = \frac{1}{n+1} u_{2n}$$

と書けること。 $q_0(n) = q_n(n)$ がそう書けることは $4w_{2n+2}$ を計算してみれば分かる。

一般には、最初に状態 0 に戻る時点により全確率の公式を適用する。

$$\begin{aligned} q_m(n) &= \sum_{i=1}^m \frac{f_{2i}}{2} q_{m-i}(n-i) + \sum_{i=1}^{n-m} \frac{f_{2i}}{2} q_m(n-i) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{f_{2i}}{2} q_0(n-i) + \sum_{i=m+1}^n \frac{f_{2(n-i+1)}}{2} q_0(i-1) \end{aligned}$$

2 番目の等式は帰納法の仮定を使っている。ここで、

$$f_{2n} = \frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1} 2^{-2n} = \frac{1}{2n} u_{2n-2} = \frac{1}{2} q_0(n-1)$$

の式を適用すると、

$$q_m(n) = \sum_{i=1}^m \frac{f_{2i}}{2} 2 f_{2(n-i+1)} + \sum_{i=m+1}^n \frac{f_{2(n-i+1)}}{2} 2 f_{2i} = \sum_{i=1}^n f_{2i} f_{2(n-i+1)}$$

となり、 m とは無関係になることが言える。

問題 5.13 推移確率が $p_{0i} = a_i, p_{i,i-1} = 1 (i = 0, 1, 2, \dots, N)$ で与えられるようなマルコフ連鎖が極限分布を持つ必要十分条件を示し、その条件が成り立つときの極限分布を計算しなさい。

略解：どんな状態からも状態 0 に戻ることができるので、結局、状態 0 から状態 N にさえ行けば、マルコフ連鎖は既約、従って $a_N > 0$ が必要。状態数が有限なので、あとは非周期的であればよい。周期的であるためには数の集合 $\{i > 0, a_{i-1} > 0\}$ の最大公約数が 1 であればよい。これらの二つの条件を合わせたものが必要十分条件になる。 $N = 3, a_1 = a_2 = 0.5$ ならば状態 3 は一時的、 $a_1 = a_3 = 0.5$ ならば周期的、 $a_2 = a_3 = 0.5$ ならば非周期的、などなど。

問題 5.14 推移確率が $p_{i,i+1} = 1 - p_{i,0} = a_i (i = 0, 1, 2, \dots)$ (ただし、 $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots$ 、ある j で $a_j < 1$) で与えられるようなマルコフ連鎖が極限分布を持つことを示し、極限分布を計算しなさい。

略解： $a_j < 1$ となる j があれば、 $\forall k > j$ となる状態 k からは必ず状態 0 に戻ることができるので、 $a_k > 0$ となる最大の k を $k^* - 1$ とすれば、状態集合 $\{0, 1, \dots, k^*\}$ だけで推移を考えると、既約で正再帰的、非周期的連鎖になるので、極限分布が存在する。 $\{k^* + 1, k^* + 2, \dots\}$ は一時的状態集合なので、その極限確率はゼロである。平衡方程式は次の通り：

$$\pi_i = a_{i-1}\pi_{i-1} = A_{i-1}\pi_0, \quad i = 1, 2, \dots, k^*$$

ただし、 $A_k = a_0 a_1 \cdots a_k$ と置いた。したがって、

$$\pi_0 = \left\{ \sum_{i=0}^{k^*-1} A_i \right\}^{-1}$$

特に、 $a_i = a$ (一定) ならば、 $k^* = \infty, \pi_0 = 1 - a$ であり、

$$\pi_i = (1 - a)a^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

が得られる。

問題 5.15 有限状態の再帰的マルコフ連鎖について、状態 i から出発して、状態 k を初めて訪問するまでの時間の期待値を m_{ik} とする。

(a) 逐次推移解析法を使って次の式が成り立つことを示しなさい。

$$m_{ik} = 1 + \sum_{j \neq k} p_{ij} m_{jk}$$

(b) 両辺に定常確率 π_i を掛けて i について和を取ることににより $\pi_i = 1/m_{ii}$ であることを導きなさい。

略解：(a) 状態 k を訪問するまでの推移回数を T_k とすると、最初の状態 $X_0 = i$ から 1 回は推移し ($i = k$ の場合も 1 回は推移するというのが定義) k に直接推移した場合はそれで終わり、 $j \neq k$ へ推移した場合はそこを初期状態として新たに期待値を計算することになる。従って、

$$E(T_k | X_0 = i) = 1 + \sum_{j \neq k} p_{ij} E(T_k | X_0 = j) \Leftrightarrow m_{ik} = 1 + \sum_{j \neq k} p_{ij} m_{jk}$$

(b)

$$\begin{aligned} \sum_i \pi_i m_{ik} &= \sum_i \pi_i + \sum_i \pi_i \sum_{j \neq k} p_{ij} m_{jk} = 1 + \sum_{j \neq k} m_{jk} \sum_i \pi_i p_{ij} = 1 + \sum_{j \neq k} \pi_j m_{jk} \\ &\Leftrightarrow \pi_k m_{kk} = 1 \Leftrightarrow \pi_k = \frac{1}{m_{kk}} \end{aligned}$$

問題 5.16 ある人が家と会社の間の通勤に、雨が降ったら車を使うことにしている。雨が降っていなければ歩く。雨が降っていなくてもそこに車がなければ歩く。ある朝雨が降っていたとすると帰りに雨も降っている確率、ある日の帰りに雨が降っていたとすると、翌朝にも雨が降っている確率は共に p とする。車は 1 台しか持っていないとして、雨の中を歩いて帰る羽目になる日は 30 日間でどれくらいありますか。車が 2 台ある場合はどうなりますか。

略解：

問題 5.17 推移確率が $p_{ik} = 1/(i+2) (k = 0, 1, \dots, i+1; i = 0, 1, 2, \dots)$ で与えられるマルコフ連鎖の定常分布を計算しなさい。

略解：現在の状態を k とすると、次の推移で 0 以上 $k+1$ の中からランダムに選んで推移する、というマルコフ連鎖になっている。定常方程式は

$$\pi_k = \frac{1}{1+k}\pi_{k-1} + \frac{1}{2+k}\pi_k + \frac{1}{3+k}\pi_{k+1} + \dots, k = 1, 2, \dots \quad (7)$$

なので、

$$\pi_k - \pi_{k+1} = \frac{1}{1+k}\pi_{k-1} \Rightarrow \pi_{k-1} = (1+k)(\pi_k - \pi_{k+1}) \quad (8)$$

ここで、 $\pi_k = \frac{c}{k!}$ を代入するとこの等式を満たすことが分かるので、解の形が決まる。後は確率条件によって、

$$\pi_k = \frac{1}{k!}e^{-1}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (9)$$

すなわち、パラメータ 1 のポワソン分布に従う。

6 マルコフ過程

練習 6.1 平均 10 の指数分布に従う確率変数を W としたとき、 W の累積分布関数、モーメント母関数、分散を（上の式に当てはめるのではなく）「計算」しなさい。

略解：

$$\begin{aligned} P(W \leq x) &= 1 - e^{-x/10} \\ M(z) &= E(e^{zW}) = \int_0^\infty e^{zx} \frac{1}{10} e^{-x/10} dx = \frac{1/10}{1/10 - z} \int_0^\infty \left(\frac{1}{10} - z \right) e^{-(1/10+z)x} dx \\ &= \frac{1}{1 - 10z} \\ M'(z) &= \frac{10}{(1 - 10z)^2}, M''(z) = \frac{200}{(1 - 10z)^3} \\ \Rightarrow V(W) &= M''(0) - (M'(0))^2 = 100 \end{aligned}$$

練習 6.2 X は平均 3 の指数分布に従う確率変数、 M は X の整数部分の値を取る離散確率変数とする（ $X = 3.4$ ならば $M = 3$ のように）。このとき、 M の確率関数を求めなさい。

略解：

$$P(M = k) = P(k \leq X < k+1) = e^{-\lambda k} (1 - e^{-\lambda}) = r^k (1 - r), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

ただし、 $r = e^{-\lambda} = e^{-1/3}$ と置いた。ということは幾何分布、すなわち、指数分布を離散化すると幾何分布になる。ただし、取り得る値は $0, 1, 2, \dots$ 。

練習 6.3 状態数が 2 のマルコフ過程の推移確率関数に関する連立微分方程式を作り、その方程式を解くと上のような結果になることを確かめなさい。

略解：

$$\begin{aligned} p_{ik}(t+h) &= P(X(t+h) = k \mid P(0) = i) = p_{i0}(t)p_{0k}(h) + p_{i1}(t)p_{1k}(h) \\ \Rightarrow p_{i0}(t+h) - p_{i0}(t) &= (1 - p_{00}(h))p_{i0}(t) + p_{i1}(t)p_{10}(h) \\ \Rightarrow p'_{i0}(t) &= -\nu_0 p_{i0}(t) + \nu_1 p_{i1}(t) = -(\nu_0 + \nu_1)p_{i0}(t) + \nu_1 \end{aligned}$$

$i = 0$ とすると、

$$p'_{00}(t) = -(\nu_0 + \nu_1)p_{00}(t) + \nu_1$$

となるので、 $+\nu_1$ を無視すれば指数関数 $e^{-(\nu_0+\nu_1)t}$ の形が得られる。結局、次が得られる。

$$p_{00}(t) = \frac{\nu_1}{\nu_0 + \nu_1} + \frac{\nu_0}{\nu_0 + \nu_1} e^{-(\nu_0+\nu_1)t}$$

比例定数は、境界条件 $p_{00}(0) = 1$ から決まる。 $p_{11}(t)$ も同様にして、次のように計算出来る。

$$p_{11}(t) = \frac{\nu_0}{\nu_0 + \nu_1} + \frac{\nu_1}{\nu_0 + \nu_1} e^{-(\nu_0+\nu_1)t}$$

練習 6.4 生成行列が下のように与えられるマルコフ過程の平衡方程式を立て、それを解きなさい。

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0.7 & 0.3 \\ 1.4 & -2 & 0.6 \\ 0.2 & 0.8 & -1 \end{pmatrix}$$

略解：

$$\begin{cases} -10\pi_0 + 14\pi_1 + 2\pi_2 = 0 \\ 7\pi_0 - 20\pi_1 + 8\pi_2 = 0 \\ 3\pi_0 + 6\pi_1 - 10\pi_2 = 0 \end{cases}$$

これを解いて、

$$\pi_0 = \frac{76}{174}, \pi_1 = \frac{47}{174}, \pi_2 = \frac{51}{174}$$

練習 6.5 パラメータ $\lambda_i = (i+1)\lambda (i=0, 1, 2, \dots)$, $\mu_i = i\mu (i=1, 2, \dots)$ の出生死亡過程について、以下の問いに答えなさい。

- (1) 状態 0 から状態 2 へ推移する時間の期待値を計算しなさい。
- (2) 状態 2 から状態 5 へ推移する時間の期待値を計算しなさい。
- (3) 上の各問いに対して、それらの所要時間の分散を計算しなさい。

略解：(1) 出生死亡過程の状態の動きは必ず隣同士なので、状態 i から初めて状態 $i+1$ へ推移するまでの時間を T_i とすると、問題の解は $T_0 + T_1$ の期待値に等しい。状態 i の滞在時間を S_i とすると、 T_i は、 S_i 滞在した後すぐ $i+1$ へ移るか、 $\mu_i/(\lambda_i + \mu_i)$ の確率で $i-1$ に推移し、その後 i に戻って $i+1$ と推移するかのいずれかなので、次のように書くことができる。

$$T_i = S_i + \mu_i/(\lambda_i + \mu_i)(T_{i-1} + T'_i), \quad i = 1, 2, \dots$$

T_i, T'_i は互いに独立な確率変数で、ともに、状態 i から初めて状態 $i+1$ へ推移するまでの時間を表すとする。したがって、 $t_i = E(T_i)$ と置くと、 $a = \mu/\lambda$ と置いて

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{1}{\lambda} \\ t_1 &= \frac{1}{\lambda_1 + \mu_1} + \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1}(t_0 + t_1) \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2\lambda} \left(1 + \frac{\mu_1}{\lambda_0}\right) = \frac{1}{2\lambda} (1 + a) \end{aligned}$$

問題の答えは $t_0 + t_1$ 。

- (2) 同様に $t_2 + t_3 + t_4$

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{1}{\lambda_2 + \mu_2} + \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2}(t_1 + t_2) \Rightarrow t_2 = \frac{1}{3\lambda} (1 + a + a^2) \\ t_3 &= \frac{1}{\lambda_3 + \mu_3} + \frac{\mu_3}{\lambda_3 + \mu_3}(t_2 + t_3) \Rightarrow t_3 = \frac{1}{4\lambda} (1 + a + a^2 + a^3) \\ t_4 &= \frac{1}{5\lambda} \frac{1 - a^5}{1 - a} \end{aligned}$$

(3) $T_i = S_i + \mu_i/(\lambda_i + \mu_i)(T_{i-1} + T'_i)$ で、各確率変数は互いに独立なので、漸化式を使って計算すればよい。 T_i の分散を v_i と置くと、

$$v_i = \left(\frac{1}{\lambda_i + \mu_i}\right)^2 + \left(\frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}\right)^2 (v_{i-1} + v_i) \Rightarrow v_i = \frac{1}{\lambda_i(\lambda_i + 2\mu_i)} (1 + \mu_i^2 v_{i-1})$$

あとは $(\frac{1}{\lambda})^2 + v_1 + v_2 + v_3, v_2 + v_3 + v_4$ を計算するだけ。

練習 6.6 3 台の機械を一人の整備工が点検修理を担当している。平均稼働時間は 4 日、平均修理時間は 1 日としたとき、機械の稼働率はどれくらいになりますか。稼働時間も修理時間も指数分布に従うものとして計算しなさい。

略解：稼働率は $\pi_0 + \frac{2}{3}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2$ に等しい。 $M = 3, \lambda = 0.25, \mu = 1, a = \lambda/\mu$ とすると、

$$\begin{aligned}\pi_1 &= 3a\pi_0, \pi_2 = 6a^2\pi_0, \pi_3 = 6a^3\pi_0 \\ \Rightarrow \pi_0 &= \frac{1}{1 + 3a + 6a^2 + 6a^3} = \frac{64}{64 + 48 + 24 + 6}\end{aligned}$$

なので、

$$\pi_0 + \frac{2}{3}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 = \frac{32}{71}(1 + 2a + 2a^2) = \frac{52}{71}$$

演習問題

問題 6.1 X は平均 λ^{-1} の指数分布に従うものとする。このとき $X \leq c$ という条件の下での X の期待値を次の二つの方法で計算しなさい。

- (1) 条件付期待値の定義どおりに計算しなさい。
- (2) 以下の全確率の公式を使って計算しなさい。

$$E(X) = E(X | X \leq c)P(X \leq c) + E(X | X > c)P(X > c)$$

略解：(1) $X < c$ という条件の下で X の密度関数は

$$f(x | X \leq c) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda c}}$$

したがってその期待値は

$$\begin{aligned}\int_0^c x \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda c}} dx &= \frac{1}{\lambda(1 - e^{-\lambda c})} \int_0^c \lambda^2 x e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\lambda(1 - e^{-\lambda c})} (1 - e^{-\lambda c} - \lambda c e^{-\lambda c}) = \frac{1}{\lambda} - \frac{c e^{-\lambda c}}{1 - e^{-\lambda c}}\end{aligned}$$

- (2) 無記憶性より、 $E(X - c | X > c) = E(X)$ なので、

$$\begin{aligned}E(X) &= E(X | X \leq c)P(X \leq c) + E(X | X > c)P(X > c) \\ &= E(X | X \leq c)(1 - e^{-\lambda c}) + \left(\frac{1}{\lambda} + c\right)e^{-\lambda c} \\ \Rightarrow E(X | X \leq c) &= \frac{1}{1 - e^{-\lambda c}} \left(\frac{1}{\lambda} - \left(\frac{1}{\lambda} + c\right)e^{-\lambda c}\right) = \frac{1}{\lambda} - \frac{c e^{-\lambda c}}{1 - e^{-\lambda c}}\end{aligned}$$

もちろん、両者は一致する。

問題 6.2 X は指数分布に従う確率変数としたとき、 $E(X^2 | X > 1)$ と等しいのは次の三つのうちどれですか。計算することなく、理由とともに答えなさい。

- (1) $E((X + 1)^2)$
- (2) $E(X^2)$
- (3) $(1 + E(X))^2$

略解： $X = (X - 1) + 1$ と置き直す。 $X > 1$ ならば $X - 1$ は X と同じ分布をするので、答えは (1)。実際、 $X > 1$ という条件の下での X の密度関数は

$$f(x | X > 1) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda}} \quad (x > 1)$$

したがって、

$$\begin{aligned}E(X^2 | X > 1) &= \int_1^\infty x^2 \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda}} dx = \frac{2}{\lambda^2 e^{-\lambda}} \int_1^\infty \frac{\lambda^3 x^2}{2} e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{2}{\lambda^2 e^{-\lambda}} \left(e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda^2} (2 + 2\lambda + \lambda^2) = \frac{2}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda} + 1\end{aligned}$$

一方、

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

したがって、

$$E(X^2 | X > 1) = E(X^2) + 2E(X) + 1 = E((X+1)^2)$$

X は無記憶性を持つ、だから、 $E(X^2)$ 、と考えてはいけない。1 単位時間が経過した、という履歴は残る。

問題 6.3 X_k は平均 μ_k^{-1} の指数分布に従っているものとする ($k = 1, 2, 3$)。このとき

(1) $P(X_1 < X_2 < X_3)$ はいくつですか。

(2) $P(X_1 < X_2 | \max(X_1, X_2, X_3) = X_3)$ はいくつですか。

略解：(1)

$$P(X_1 < X_2 < X_3 | X_1 = \min\{X_1, X_2, X_3\}) = P(X_2 < X_3) = \frac{\mu_2}{\mu_2 + \mu_3}$$

$$P(X_1 = \min\{X_1, X_2, X_3\}) = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}$$

を合わせて、

$$P(X_1 < X_2 < X_3) = \frac{\mu_2}{\mu_2 + \mu_3} \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}$$

地道に計算しても出来る。

$$\begin{aligned} P(X_1 < X_2 < X_3) &= E(P(X_1 < X_2 < X_3 | X_2)) \\ &= \int_0^{\infty} P(X_1 < x) P(x < X_3) \mu_2 e^{-\mu_2 x} dx = \dots \end{aligned}$$

(2)

$$P(X_1 < X_2 | \max(X_1, X_2, X_3) = X_3) = \frac{P(X_1 < X_2, \max(X_1, X_2, X_3) = X_3)}{P(\max(X_1, X_2, X_3) = X_3)}$$

分子 $= P(X_1 < X_2 < X_3)$

分母 $= P(\max(X_1, X_2, X_3) = X_3, X_1 < X_2) + P(\max(X_1, X_2, X_3) = X_3, X_1 > X_2)$
 $= P(X_1 < X_2 < X_3) + P(X_2 < X_1 < X_3)$

$$\begin{aligned} P(X_1 < X_2 | \max(X_1, X_2, X_3) = X_3) &= \frac{1}{1 - \frac{P(X_2 < X_1 < X_3)}{P(X_1 < X_2 < X_3)}} = \left(1 + \frac{\mu_2 + \mu_3}{\mu_1 + \mu_3}\right)^{-1} \\ &= \frac{\mu_1 + \mu_3}{\mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3} \end{aligned}$$

問題 6.4 サービス窓口が二つあって、客は最初の窓口でサービスを終えた後、二番目の窓口のサービスを受けて退去する。サービス時間はいずれも指数分布で、平均時間は順番にそれぞれ λ^{-1}, μ^{-1} とする。二つの窓口の間に待ちスペースはない。最初の窓口でサービスを終えたとき、次の窓口がまだサービス中の場合は、最初の窓口から先へ進めないで、最初の窓口の機能が停止する。つまり、待ち客がいても次のサービスを開始することができない。2 番目の窓口のサービスを終えたとき、最初の窓口のサービスを終えた客がいれば、直ちにその客へのサービスを開

始する。もし、最初の窓口待ち客がいれば、その客に対するサービスが開始される。このとき以下の問に答えなさい。

(1) 客 A が到着したとき、最初の窓口には客がなく、2 番目の窓口はサービス中だったとすると、客 A が退去するまでの平均滞在時間を求めなさい。

(2) 客 B が到着したとき、二つの窓口がサービス中で、待ち客はいなかったとすると、客 B の平均滞在時間はどれくらいですか。

略解：(1) 最初の窓口を退去するまでの時間は $\frac{1}{\lambda}$ 。そのときに次の窓口客がいなければ、 $\frac{1}{\mu}$ 後に退去できる。さもなければ $\frac{2}{\mu}$ 後になる。前者の確率は $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$ なので、結局、次が得られる。

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \frac{2}{\mu} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \frac{1}{\mu}$$

結果的に、誰もいない場合の滞在時間 $(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu})$ に、前の客がいることによって起こる遅延（待たされる確率 $\lambda/(\lambda+\mu)$ と待たされる時間 $\frac{1}{\mu}$ の積）を加えたものになっている。

(2) 客 B が到着してからサービスが開始されるまでの時間は二つの窓口のサービスが両方とも終わる時間、つまり、二つのサービス時間の最大値に等しい。その期待値は

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu}{\lambda\mu(\lambda+\mu)}$$

B がサービスを開始するとき、2 番目の窓口のサービスも同時に開始される。したがって、そこから先の B の滞在時間は (1) で求めたものと同じ。したがって、 B の平均滞在時間は

$$\frac{\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu}{\lambda\mu(\lambda+\mu)} + \frac{2\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2}{\lambda\mu(\lambda+\mu)} = \frac{3\lambda^2 + 3\lambda\mu + 2\mu^2}{\lambda\mu(\lambda+\mu)} = \frac{2}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \frac{2}{\mu}$$

これも、順調に行った場合の滞在時間 $(\frac{2}{\lambda} + \frac{1}{\mu})$ に、前の客がいることによって起こる遅延（待たされる確率 $\lambda/(\lambda+\mu)$ と待たされる時間 $\frac{1}{\mu}$ の積の 2 倍）を加えたものになっている。

問題 6.5 (続き) 二つの窓口の間には 1 人が待てるだけのスペースがあるものとする。ある客 A が最初の窓口に着いたとき、最初の窓口は空いていて、次の窓口はサービス中、さらに 1 人の客が最初の窓口のサービスを終えて次の窓口が空くのを待っていたとする。このとき、客 A の平均滞在時間を求めなさい。

略解：最初に A のサービスが終わった場合はあと $3/\mu$ 滞在する、最初に 2 番目の窓口のサービスが終わった場合は、上の問題と同じ状況になる。したがって、 A の滞在時間は

$$\frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \frac{3}{\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \frac{3\lambda^2 + 3\lambda\mu + 2\mu^2}{\lambda\mu(\lambda+\mu)}$$

問題 6.6 ある組織体はオスとメスからなっている。時間間隔 h の間に確率 $\lambda h + o(h)$ でランダムに一つのオスと一つのメスが出会い子を作る。子の性別はオスメスが五分五分である。時刻 t におけるオス、メスの人口をそれぞれ $N_1(t), N_2(t)$ とする。このとき $\{N_1(t), N_2(t)\}$ が連続時間のマルコフ連鎖になることを示し、そのパラメータ（各状態の滞在時間と、条件付推移確率）を決定しなさい。

略解： $N_1(t), N_2(t)$ が与えられれば、その次の状態は $N_1(t)$ か $N_2(t)$ のいずれかが 1 増えるだけで、その増え方はマルコフ的に決まる。したがって、連続時間のマルコフ連鎖になる。滞在時間はパラメータ λ の指数分布に従い、条件付き推移確率は

$$p_{(i,k)(i+1,k)} = p_{(i,k)(i,k+1)} = 0.5$$

問題 6.7 ある個体には二つの型がある。A 型はパラメータ a の指数時間で B 型に変わり、B 型はパラメータ b の指数時間後に二つの A 型に変わる。A 型と B 型の人口の変化を記述する連続時間のマルコフ連鎖モデルを作りなさい。

略解：A 型、B 型の時刻 t の人口を $X(t), Y(t)$ とすると、

$$\begin{aligned} P(X(t+\Delta t) = i-1, Y(t+\Delta t) = k+1 | X(t) = i, Y(t) = k) &= ia\Delta t + o(\Delta t) \\ P(X(t+\Delta t) = i+2, Y(t+\Delta t) = k-1 | X(t) = i, Y(t) = k) &= kb\Delta t + o(\Delta t) \\ P(X(t+\Delta t) = i, Y(t+\Delta t) = k | X(t) = i, Y(t) = k) &= 1 - (ia + kb)\Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$

それ以外の組み合わせの推移は無視できる ($o(\Delta t)$)。

問題 6.8 2 台の機械を一人の修理工がメンテナンスしている。機械 k ($= 1, 2$) の稼働時間は平均 μ_k 分の 1 の指数分布に従う。修理時間は平均 μ 分の 1 の指数分布に従う。この状況を出生死亡過程で記述できるか。できるとすれば、そのパラメータを決めなさい。できないとすれば、どのようなモデルが考えられますか。

略解：考えられる状態は、「2 台とも稼働」、「機械 1 が稼働、機械 2 が修理」、「機械 1 が修理、機械 2 が稼働」、「機械 1 が修理、機械 2 が修理待ち」、「機械 1 が修理待ち、機械 2 が修理」の 5 通り、これらを一列に並べて、状態推移が隣同士だけ、というモデル化は出来ない。稼働を 0、修理を 1、修理待ちを 2 とし、状態を (i, j) と表すことにすると、 (i, j) は連続時間のマルコフ連鎖になり、生成行列は次で与えられる。

$$\begin{matrix} (0,0) \\ (1,0) \\ (0,1) \\ (1,2) \\ (2,1) \end{matrix} \begin{pmatrix} -\mu_1 - \mu_2 & \mu_1 & \mu_2 & 0 & 0 \\ \mu & -\mu - \mu_2 & 0 & \mu_2 & 0 \\ \mu & 0 & -\mu - \mu_1 & 0 & \mu_1 \\ 0 & 0 & \mu & -\mu & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

問題 6.9 パラメータ λ のポワソン過程に従って窓口が一つのサービスシステムに客が到着する。システム内に客が n 人いるとき、確率 a_n で行列の最後に並ぶ。サービス時間が平均 μ 分の 1 の指数分布に従うとき、このシステムは出生死亡過程としてモデル化できることを説明し、必要なパラメータを決めなさい。

略解： $a_n = 1$ としたときは出生死亡過程に従う。時点 t で状態 n にいたとき、時点 $t + \Delta t$ で推移する状態は、 $o(\Delta t)$ を無視すれば ± 1 以内であることは変わらない。 $a_n < 1$ のときに変わるのは出生率パラメータだけである。 $1 - a_n$ の確率で、幻の出生が観測された（出生は無かった）と考えれば、出生率は λa_n の出生死亡過程を観察しているのと同じ。

問題 6.10 人口 N の集団で幾つかの個体が菌に侵されている。パラメータ λ のポワソン過程に従ってランダムに二つの個体が出会う。出会った二つの個体の一方が菌に侵され、もう一方が侵されていない場合は、確率 p で菌に侵されていない個体が侵されるものとする。いったん菌に犯されると元には戻れない。時点 t における菌に侵された個体の個数を $X(t)$ とする。このとき

- (1) $\{X(t), t \geq 0\}$ はマルコフ性を持つか。
- (2) どのような確率過程になるか、説明しなさい。
- (3) 最初菌に侵されている個体の個数が一つだった場合、 N 個すべての個体が菌に侵されるまでの時間の期待値を計算しなさい。

略解：(1) 状態変化はランダムにやってくる時間にのみ生じる可能性があり、変化を起こす確率

は独立に定まるので、マルコフ性がある。

(2) 全員が汚染されると、つまり $X(t) = N$ になると変化がなくなる、したがって、吸収的マルコフ連鎖。

(3) $X(t) = i$ の滞在時間は、 $r_i = \frac{2i(N-i)}{N(N-1)}p$ の確率で成功するベルヌイ試行をパラメータ λ の指数時間間隔で繰り返したときに成功するまでの時間に等しい。その時間は指数分布に従い、平均は $(\lambda r_i)^{-1}$ 。したがって、吸収されるまでの時間の期待値は

$$\sum_{i=1}^{N-1} \frac{N(N-1)}{2\lambda p i(N-i)} = \frac{N-1}{2\lambda p} \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{N-i} \right) = \frac{N-1}{\lambda p} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{i}$$

これは出会う間隔が一定、つまり離散のマルコフ連鎖で求めた結果に平均出会い間隔 λ^{-1} を掛けたものになっている。

問題 6.11 パラメータ λ のポワソン過程に従ってクラブに入会し、 k ステージを経過した後正会員になることができる。各ステージを通過するためにはそれぞれ平均 μ 分の 1 の指数分布に従う時間がかかる。時刻 t にステージ k にいる会員の人数を $N_k(t)$ とする。 $N(t) = (N_1(t), N_2(t), \dots, N_{k-1}(t))$ とおいたとき、以下の質問に答えなさい。

(1) $\{N(t), t \geq 0\}$ は連続時間のマルコフ連鎖か。

(2) もしそうならば、生成行列を求めなさい。

略解：(1) 途中で気が変わって止める、という場合について何も言及していないので、ただひたすらステージを増やし、正会員になったらシステムから出て行く、という場合の分析に限る。 $N_1(t) = n$ ならば、 Δt 時間後には $\lambda \Delta t$ の確率で 1 増え、 $n\mu \Delta t$ の確率で 1 減る。 $N_{i-1}(t) = n', N_i(t) = n$ ならば、 Δt 時間後には $n'\mu \Delta t$ の確率で 1 増え、 $n\mu \Delta t$ の確率で 1 減る。従って、 $(N_1(t), N_2(t), \dots, N_{k-1}(t))$ が与えられると $(N_1(t + \Delta t), N_2(t + \Delta t), \dots, N_{k-1}(t + \Delta t))$ が計算できるので $N(t) = (N_1(t), N_2(t), \dots, N_{k-1}(t))$ は連続時間のマルコフ連鎖になる。

(2) $n = (n_1, n_2, \dots, n_{k-1})$ に対して、 $n_{i-1}, n_i (i = 1, 2, \dots, k-1)$ をそれぞれ $n_{i-1} - 1, n_i + 1$ で置き換えたものを n_i^+ 、 n_1 を $n_1 + 1$ で置き換えたものを n_1^+ 、 n_{k-1} を $n_{k-1} - 1$ で置き換えたものを n_{k-1}^- 、と書く。推移行列は、その (n, n_i^+) 要素が $n_{i-1}\mu (i = 2, 3, \dots, k-1)$ 、 (n, n_1^+) 要素が λ 、 (n, n_{k-1}^-) 要素が $n_{k-1}\mu$ 、それ以外の非対角要素は 0、対角要素は行和が 0 になるように決める。

問題 6.12 $\mu_n = \mu$ の純死亡過程について、推移確率関数 $p_{jk}(t)$ を求めなさい。

略解： $X(0) = m$ とした場合、生成行列は、 $\alpha_{ii} = -\mu, a_{i,i-1} = \mu (i = 1, 2, \dots, m)$ 。したがって、微分方程式は

$$\frac{d}{dt} p_{ik}(t) = -\mu p_{ik}(t) + \mu p_{i,k+1}(t)$$

これを解いて

$$p_{mk}(t) = \frac{(\mu t)^{m-k}}{(m-k)!} e^{-\mu t}$$

問題 6.13 一つの個体から出発するユール過程を考えます。すなわち $X(0) = 1$ とします。状態 k から $k+1$ へ推移するのに必要な時間を T_k とします。このとき

(1) T_k は独立にパラメータ $k\lambda$ の指数分布に従うことを説明しなさい。

(2) $X_1, X_2, \dots$ はいずれもパラメータ λ の指数分布に従う独立な確率変数とする。 X_k は k 番目の個体の寿命と考えることができる。このときパラメータ $\lambda, 2\lambda, \dots$ の指数分布に従う確率変

数をそれぞれ $Y_1, Y_2, \dots$ として、

$$\max \{X_1, X_2, \dots, X_k\} = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k$$

と表されることを説明しなさい。

(3) 上の 2 つから以下の式が成り立つことを説明しなさい。

$$P(T_1 + T_2 + \dots + T_k < t) = (1 - e^{-\lambda t})^k$$

(4) このことから、ユール過程の推移確率関数 $p_{1k}(t)$ は

$$P_{1k}(t) = (1 - e^{-\lambda t})^{k-1} - (1 - e^{-\lambda t})^k = e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{k-1}$$

すなわち、パラメータ $e^{-\lambda t}$ の幾何分布にしたがうことを説明しなさい。

略解：(1) $P(X(t+\Delta t) = k \mid X(t) = k) = 1 - k\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ より、 $P(T_k > n\Delta t) \approx (1 - k\lambda\Delta t)^n$ 、 $\Delta t \rightarrow 0$ とすれば、 $e^{-k\lambda t}$ に収束する。これは T_k がパラメータ $k\lambda$ の指数分布に従うことを意味する。

(2) $X_1, X_2, \dots, X_k$ を小さいもの順に並べたものを $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(k)}$ とすると、

$$\max \{X_1, X_2, \dots, X_k\} = X_{(k)} = X_{(1)} + (X_{(2)} - X_{(1)}) + \dots + (X_{(k)} - X_{(k-1)})$$

と書き換えられる。 $X_{(1)}$ は $\min \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ と同じなので、パラメータ $k\lambda$ の指数分布にしたがう。 $X_{(2)} - X_{(1)}$ は $X_{(1)}$ を除いた $k-1$ 子の独立な指数分布の最小値の分布と同じなので、パラメータ $(k-1)\lambda$ の指数分布にしたがう。以下同様なので、 $\max \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ は $Y_k + Y_{k-1} + \dots + Y_1$ と同じ分布にしたがう。

(3) $T_1 + T_2 + \dots + T_k$ は $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k$ と同じ分布にしたがい、最大値の分布は累積分布関数の積で与えられるので、

$$P(T_1 + T_2 + \dots + T_k < t) = P(\max \{X_1, X_2, \dots, X_k\} < t) = (1 - e^{-\lambda t})^k$$

(4) 計数過程の計数と事象の発生時刻の関係を式に表せば、次の関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned} P(X(t) = j \mid X(0) = 1) &= P(X(t) \geq j \mid X(0) = 1) - P(X(t) \geq j+1 \mid X(0) = 1) \\ &= P(T_1 + T_2 + \dots + T_{j-1} < t) - P(T_1 + T_2 + \dots + T_j < t) \\ &= e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{j-1} \end{aligned}$$

7 待ち行列モデル

練習 7.1 平均到着間隔が 10 分、平均サービス時間が 8 分の $M/M/1$ モデルで、1 回の稼働サイクル中に処理される平均客数を計算しなさい。平均到着間隔が 20 分になったとき、同じ問題を解きなさい。

略解：到着率を λ 、サービス率を μ とすると、平均稼働時間 $(\mu - \lambda)^{-1}$ の間に平均 μ^{-1} の間隔で処理されるので、1 稼働サイクル中に処理される平均客数は $\mu(\mu - \lambda)^{-1} = (1 - \rho)^{-1}$ 。平均到着間隔が 10(20) 分の場合は $\rho = 0.8(0.4)$ 、従って平均処理客数は $5(5/3)$

練習 7.2 平均サービス時間が 10 分の指数分布でサービスする窓口パラメータ λ のポワソン過程で客が到着する $M/M/1$ 待ち行列モデルで、いろいろな λ の値に対して、平均系内客数が分かるようなグラフを描きなさい。

略解：平均系内客数の公式 $L = \rho/(1 - \rho)$ に、 $\rho = 10\lambda$ を代入して

$$L = \frac{10\lambda}{1 - 10\lambda}$$

これを $\rho < 1$ 、すなわち $\lambda < 0.1$ の範囲でプロットすればよい。 $\lambda = 0.1$ の付近で急激に大きくなるので、グラフの特徴を見るためには 0.09 位までにしておいた方がよい。

練習 7.3 EXCEL を使って、トラフィック密度を 0 から 1 まで変化させたときの平均待ち時間のグラフを描きなさい。

略解：平均サービス時間を 1 とすると、平均待ち時間は平均系内客数のグラフと同じ。

練習 7.4 平均到着間隔が 5 分、平均サービス時間が 4 分の $M/M/1$ モデルで、滞在時間が平均サービス時間の 3 倍を超える確率を計算しなさい。

略解：滞在時間はパラメータ $\mu - \lambda$ の指数分布に従うので、平均サービス時間の 3 倍を超える確率は

$$e^{-3(\mu - \lambda)/\mu} = e^{-3(1 - \rho)} = e^{-0.6} = 0.55$$

練習 7.5 到着率 λ 、サービス率 μ の $M/M/s$ モデルにおいて、定常状態時の一つの窓口の稼働率を計算しなさい。

略解：延べ稼働率つまり、平均稼働窓口数 $E(\min\{X, s\})$ を計算して s で割れば一つの窓口の稼働率が計算できる。

練習 7.6 $M/M/\infty$ モデルにおいて、平均滞在時間、平均系内客数を計算しなさい。

略解：平均系内客数はポワソン分布の平均と同じ、と考えても良いが、リトルの公式を使って次のように推論できる。平均滞在時間は「あきらかに」平均サービス時間に等しい。到着率は λ なので、リトルの公式から平均滞在客数は λ/μ

練習 7.7 $B(a, s)$ の漸化式が成り立つことを証明し、 $B(55, 64)$ を計算しなさい。

略解：

$$\begin{aligned}\frac{1}{B(a, s)} &= \frac{1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots + \frac{a^{s-1}}{(s-1)!}}{\frac{a^s}{s!}} + 1 \\ &= \frac{1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots + \frac{a^{s-1}}{(s-1)!}}{\frac{a^{s-1}}{(s-1)!}} \frac{s}{a} + 1 = \frac{1}{B(a, s-1)} \frac{s}{a} + 1\end{aligned}$$

$$B(55, 64) = 0.02757$$

練習 7.8 修理工が 2 人の場合はどうなりますか。

略解：サービス率が $\min\{k, 2\}\mu$ となるだけで、考え方は同じ。

$$\begin{aligned}P(X = k) &= p(k) = \frac{(N - k + 1)\lambda}{2\mu} p(k-1) \quad (k = 1, 2, \dots, N) \\ P(X = 1) &= p(1) = \frac{N\lambda}{\mu} p(0)\end{aligned}$$

練習 7.9 故障する機械のために 1 台の予備機械があったとしたらどうなりますか。

略解：機械台数が全部で $N + 1$ 台あるとすると、到着率が $\min\{N - k + 1, N\}\lambda$ となるだけで、考え方は同じ。

$$\begin{aligned}P(X = k) &= p(k) = \frac{(N - k + 1)\lambda}{\mu} p(k-1) \quad (k = 1, 2, \dots, N) \\ P(X = N + 1) &= p(N + 1) = \frac{N\lambda}{\mu} p(N)\end{aligned}$$

練習 7.10 一般に修理工が M 人、予備の機械が L 台ある場合について、故障している機械台数の定常分布を計算しなさい。

略解：機械台数は $N + L$ 、到着率が $\lambda_k = \min\{N + L - k, N\}\lambda$ 、サービス率が $\mu_k = \min\{k, M\}\mu$ の出生死亡過程を解けばよい。たとえば、 $L < M$ の場合、 $a = \lambda/\mu$ として、

$$\pi_n = \begin{cases} \frac{N^n}{n!} \pi_0 & (n \leq L) \\ \frac{N^L N!}{n!(N - (n - L))!} \pi_0 & (L < n \leq M) \\ \frac{N^L N!}{M! M^{n-M} (N - (n - L))!} \pi_0 & (M < n \leq N + L) \end{cases}$$

練習 7.11 $j > 0$ のとき、 $P(X_n = k | X_{n-1} = j) = P(Y_n = k - j + 1)$ が成り立つことを示しなさい。 $j = 0$ の場合はどうなりますか。(上の X_n の式を参考にしなさい)

略解： n 番目の客の退去によって $n - 1$ 番目の退去直後に先頭にいた待ち客がいなくなるので、その間の到着客がいなければ $X_n = j - 1$ となる。 $X_n = k$ ならば、差の $k - j + 1$ は新たに到着した客の数に等しい。 $j = 0$ の場合は $n - 1$ 番目の退去後に初めて到着した客が n 番目の退去客になるので、 $X_n = k$ はその客のサービス中に到着した客の数、すなわち $Y_n = k$ の確率に等しい。

練習 7.12 $M/G/1$ の平均滞在時間を計算しなさい。

略解：平均滞在時間は平均待ち時間に平均サービス時間を加えたもの

$$\frac{1 + c^2}{2} \frac{\rho}{1 - \rho} m + m$$

練習 7.13 k -アーラン分布の変動係数を計算し、それをサービス時間とする $M/G/1$ の平均待ち時間が、平均サービス時間を同じにした $M/M/1$ の平均待ち時間の何倍になるかを計算しなさい。ただし、 k -アーラン分布の密度関数は以下で与えられるものとします。

$$f(x) = \frac{(k\mu)^k x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k\mu x}$$

略解：アーラン分布のモーメント母関数は

$$M(z) = \int_0^\infty e^{zx} \frac{(k\mu)^k x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k\mu x} dx = \left(\frac{k\mu}{k\mu - z} \right)^k$$

平均は μ^{-1} 、2 次モーメントは $(k+1)/k/\mu^2$ 、分散は $1/(k\mu^2)$ 、したがって変動係数は $1/\sqrt{k}$ 。平均待ち時間の比較は $(1+c^2)/2$ を計算すればよい。したがって、 $k=2$ ならば $3/4$ 倍、 $k=5$ ならば 0.6 倍、 $k=10$ ならば 0.55 倍、 $k \rightarrow \infty$ のとき、 0.5 倍に近づく。

$$P(z) = (1-\rho)A(z) \frac{z-1}{z-A(z)}$$

練習 7.14 確率母関数を微分することによって、平均系内客数が上で求めたものと一致することを確かめなさい。また、分散を計算しなさい。

略解：

$$P(z) = (1-\rho)A(z) \frac{z-1}{z-A(z)}$$

を微分して

$$P'(z) = (1-\rho)A'(z) \frac{z-1}{z-A(z)} + (1-\rho)A(z) \frac{z-A(z) - (z-1)(1-A'(z))}{(z-A(z))^2}$$

$z=1$ を代入すると不定形になるので、ロピタルの定理を繰り返し使う

$$\frac{z-1}{z-A(z)} \rightarrow \frac{1}{1-\rho}, \quad \frac{z-A(z) - (z-1)(1-A'(z))}{(z-A(z))^2} \rightarrow \frac{A''(1)}{2(1-\rho)^2}$$

$A'(1) = \rho, A''(1) = E(Y(Y-1)) = V(Y) + (E(Y))^2 - E(Y) = c^2\rho^2 + \rho^2$ なので、

$$P'(1) = \rho + \frac{1+c^2}{2} \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

分散も同様にして、

$$P''(1) = (1-\rho)A''(z) \frac{z-1}{z-A(z)} + 2(1-\rho)A'(z) \frac{z-A(z) - (z-1)(1-A'(z))}{(z-A(z))^2} + (1-\rho)A(z) \left(\frac{z-A(z) - (z-1)(1-A'(z))}{(z-A(z))^2} \right)'$$

$$\text{第 1 項} \rightarrow A''(1), \text{第 2 項} \rightarrow \frac{A'(1)A''(1)}{1-\rho}$$

$$\text{第 3 項} \rightarrow \frac{2(1-\rho)A'''(1) + 3A''(1)^2}{6(1-\rho)^2}$$

したがって、分散は

$$P''(1) + P'(1) - P'(1)^2 = A''(1) + \frac{A'(1)A''(1)}{1-\rho} + \frac{2(1-\rho)A'''(1) + 3A''(1)^2}{6(1-\rho)^2} + P'(1) - P'(1)^2$$

を計算すればよい。

練習 7.15 $E(Y)$ の式が導かれることを確かめなさい。

略解：省略

練習 7.16 *Excel* を使って、サービス時間の変動係数が 3 であるような $M/G/1$ モデルの平均待ち時間のグラフを描きなさい。また、ポラツェックヒンチンの公式と上の近似式との相対誤差をいろいろな ρ の値に対して計算しなさい。

略解：省略

練習 7.17 定常状態確率が上のように与えられることを導き、 $\lambda = 1, \mu_1 = \mu_2 = 2$ の場合のブロック確率、窓口 2 の稼働率を計算しなさい。

略解：省略

練習 7.18 与えられた $\pi(j, k)$ の式が連立方程式を満たすことを確かめなさい。

略解：省略

練習 7.19 すべての客が施設 1 に到着し、そこでのサービス終了後確率 2 分の 1 で施設 2 か施設 3 へ移動し、そこでのサービスを終了したらシステムから退去する、という動きをジャクソン型待ち行列モデルでモデル化して、平衡方程式を立てなさい。ただし、施設 1 への到着率は 1、施設 1、2、3 のサービス率はそれぞれ、3, 1, 2 とします。 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を求めなさい。積形式解を作り、それが平衡方程式を満たすことを確かめなさい。

略解：各施設への到着率を求める方程式は次のように解ける。

$$\alpha_1 = \lambda = 1, \alpha_2 = p\alpha_1 = 0.5\lambda, \alpha_3 = (1-p)\alpha_1 = 0.5\lambda$$

施設 k の系内客数を n_k 、サービス率を μ_k 、定常状態で状態が (n_1, n_2, n_3) の確率を $\pi(n_1, n_2, n_3)$ とすると、それらの間に次のような関係式が成り立つ ($n_1, n_2, n_3 > 0$ の場合、他の組み合わせについても同様)。

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3)\pi(n_1, n_2, n_3) &= \lambda\pi(n_1 - 1, n_2, n_3) \\ &\quad + p\mu_1\pi(n_1 + 1, n_2 - 1, n_3) + (1-p)\mu_1\pi(n_1 + 1, n_2, n_3 - 1) \\ &\quad + \mu_2\pi(n_1, n_2 + 1, n_3) + \mu_3\pi(n_1, n_2, n_3 + 1) \end{aligned}$$

積形式解として、

$$\rho_1 = \frac{\alpha_1}{\mu_1} = \frac{\lambda}{3}, \rho_2 = \frac{\alpha_2}{\mu_2} = \frac{\lambda}{2}, \rho_3 = \frac{\alpha_3}{\mu_3} = \frac{\lambda}{4}$$

と置いて、次のようなものを想定する。

$$\pi(n_1, n_2, n_3) = (1 - \rho_1)\rho_1^{n_1}(1 - \rho_2)\rho_2^{n_2}(1 - \rho_3)\rho_3^{n_3}$$

左辺は

$$\begin{aligned} &\lambda\pi(n_1, n_2, n_3) + \alpha_1\pi(n_1 - 1, n_2, n_3) + \alpha_2\pi(n_1, n_2 - 1, n_3) + \alpha_3\pi(n_1, n_2, n_3 - 1) \\ &= \lambda\pi(n_1, n_2, n_3) + \lambda\pi(n_1 - 1, n_2, n_3) + \frac{\lambda}{2}\pi(n_1, n_2 - 1, n_3) + \frac{\lambda}{2}\pi(n_1, n_2, n_3 - 1) \end{aligned}$$

右辺は

$$\begin{aligned} & \lambda\pi(n_1 - 1, n_2, n_3) + p\alpha_1\pi(n_1, n_2 - 1, n_3) + (1 - p)\alpha_1\pi(n_1, n_2, n_3 - 1) \\ & + \alpha_2\pi(n_1, n_2, n_3) + \alpha_3\pi(n_1, n_2, n_3) \\ & = \lambda\pi(n_1 - 1, n_2, n_3) + \frac{\lambda}{2}\pi(n_1, n_2 - 1, n_3) + \frac{\lambda}{2}\pi(n_1, n_2, n_3 - 1) \\ & + \frac{\lambda}{2}\pi(n_1, n_2, n_3) + \frac{\lambda}{2}\pi(n_1, n_2, n_3) \end{aligned}$$

となって、等号が成立する。一つ以上の施設に客がいなかった場合の平衡方程式も、同様に、積形式解が満たされることが確かめられる。

練習 7.20 施設 1 のサービスが終わると、確率 4 分の 1 で施設 2 へ、確率 4 分の 3 で施設 3 へ移り、施設 2 あるいは施設 3 のサービスを終えた客は施設 1 へ戻る、という動きをしているシステムを考えます。システム内には 3 人の客がいるものとします。また、各施設のサービスは平均がそれぞれ 2, 4, 5 の指数分布に従うものとします。このとき、各施設の滞在客数ベクトルに関する平衡方程式を立てなさい。 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を求めなさい。 $G(N, K)$ を計算し、それを使った解の形が平衡方程式を満たすことを確かめなさい。

略解：

$$\alpha_1 = 1 = \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 = 0.25\alpha_1, \alpha_3 = 0.75\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 = 0.25, \alpha_3 = 0.75$$

積形式解として、

$$\pi(n_1, n_2, n_3) = G(3, 3)2^{n_1}1^{n_2}3.75^{n_3}$$

と置く。

$$\begin{aligned} G(3, 3) &= (2^3 + 2^2 + 2 + 1 + 2^2 \cdot 3.75 + 2 \times 3.75 + 3.75 + 2 \times 3.75^2 + 3.75^2 + 3.75^3)^{-1} \\ &= 0.007344 \end{aligned}$$

演習問題

問題 7.1 $M/M/1$ モデルについて、以下の計算をしなさい。

- (1) 一人のサービス時間中に到着する客の数の平均値はいくつですか。
- (2) 一人のサービス時間中に一人の客も到着しない確率はいくつですか。

略解：(1) X を一人のサービス時間中に到着する客の数、 S をサービス時間とすると、 S が決まれば X はポワソン分布に従うので、条件付き期待値の公式を使えばよい。

$$E(X) = E(E(X | S)) = \int_0^\infty \lambda t dF(t) = \lambda E(S) = \frac{\lambda}{\mu}$$

- (2) 考え方は (1) と同じ。サービス時間 t の間に一人の客も到着しない確率は $e^{-\lambda t}$

$$P(A) = E(P(A | S)) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dF(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

問題 7.2 二人の客が三つの窓口の間を行ったり来たりする。ある窓口のサービスを受けた客はどちらか客のいない方の窓口へ進む。このような割り当て方から、常に二つの窓口が稼働しているということに注意する。もし、それぞれの窓口のサービス時間が指数分布に従い、その率が μ_1, μ_2, μ_3 で与えられるとき、窓口 k ($k = 1, 2, 3$) が稼働していない時間比率を計算しなさい。

略解：3次元、あるいは2次元の状態を考えたいが、稼働していない窓口が分かればそのときの状態が記述できることに気が付けば、次のような連続時間マルコフ連鎖による分析が可能。時刻 t に稼働していない窓口の番号を $X(t)$ とする確率過程は連続時間マルコフ連鎖になる。状態 1 の滞在時間はパラメータ $\mu_2 + \mu_3$ の指数分布になり、次は確率 $\mu_2/(\mu_2 + \mu_3)$ で状態 2 へ、確率 $\mu_3/(\mu_2 + \mu_3)$ で状態 3 へ推移する。したがって、このマルコフ連鎖の生成行列は次のようになる。

$$A = \begin{pmatrix} -\mu_2 - \mu_3 & \mu_2 & \mu_3 \\ \mu_1 & -\mu_1 - \mu_3 & \mu_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & -\mu_1 - \mu_2 \end{pmatrix}$$

従って定常分布の比は、 $\mu_1 : \mu_2 : \mu_3$ で与えられる。時間比率ということは、各状態の相対滞在時間（長時間観察して、その状態に滞在した時間を観測時間で割ったもの）で、それは定常分布と同じ意味を持つ（時間平均と空間平均が等しい）。

問題 7.3 到着率 λ 、サービス率 2μ の $M/M/1$ モデルにおける客の平均滞在時間は、到着率 λ 、サービス率 μ の $M/M/2$ モデルにおける客の平均滞在時間より短いことを証明しなさい。この事実を直感的に説明できますか。また、平均待ち時間について、同じようなことがいえますか。

略解：いずれもトラフィック密度は $\lambda/(2\mu)$ で等しく、定常条件は一致する。平衡方程式を書いてもほとんどは同じ、唯一違うところは、客が一人しかいない場合だけ。客が一人しかいない場合、 $M/M/2$ では片方の窓口は遊んでいるので、その分、処理能力が落ち、サービス性能が落ちる。その結果、平均滞在時間も若干長くなることが予想される。

サービス率 2μ の $M/M/1$ モデルにおける客の平均滞在時間は

$$W = \frac{1}{2\mu} \frac{1}{1 - \rho} = \frac{1}{2\mu - \lambda}$$

到着率 λ 、サービス率 μ の $M/M/2$ モデルの定常分布は

$$\pi_0 = \left\{ 1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} \frac{1}{1 - \rho} \right\}^{-1} = \frac{1 - \rho}{1 + \rho}$$

$$\pi_n = 2\rho^n \frac{1 - \rho}{1 + \rho}, \quad n = 1, 2, \dots$$

したがって、平均待ち客数 $L_q^{(2)}$ は

$$L_q^{(2)} = \sum_{n=3}^{\infty} (n-2)\pi_n = 2\rho^3 \frac{1 - \rho}{1 + \rho} \sum_{n=3}^{\infty} (n-2)\rho^{n-3} = \frac{2\rho^3}{1 - \rho^2}$$

平均待ち時間 $W_q^{(2)}$ はリトルの公式を使って

$$W_q^{(2)} = \frac{1}{\mu} \frac{\rho^2}{1 - \rho^2}$$

平均滞在時間 $W^{(2)}$ は

$$W^{(2)} = \frac{1}{\mu} \frac{\rho^2}{1 - \rho^2} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu} \frac{1}{1 - \rho^2}$$

再びリトルの公式を使って、平均系内客数 $L^{(2)}$ は

$$L^{(2)} = \frac{2\rho}{1 - \rho^2}$$

したがって、

$$W^{(2)} - W = \frac{1}{\mu} \frac{1}{1 - \rho^2} - \frac{1}{2\mu(1 - \rho)} = \frac{2 - 1 - \rho}{2\mu(1 - \rho^2)} = \frac{1 - \rho}{2\mu(1 - \rho^2)} > 0$$

一方、 $M/M/1$ の平均待ち時間は

$$W_q = \frac{1}{2\mu} \frac{\rho}{1 - \rho}$$

したがって、

$$W_q - W_q^{(2)} = \frac{1}{2\mu} \frac{\rho}{1 - \rho} - \frac{1}{\mu} \frac{\rho^2}{1 - \rho^2} = \frac{\rho(1 + \rho) - 2\rho^2}{2\mu(1 - \rho^2)} = \frac{\rho - \rho^2}{2\mu(1 - \rho^2)} > 0$$

以上より、到着率 λ 、サービス率 2μ の $M/M/1$ モデルにおける客の平均滞在時間は、到着率 λ 、サービス率 μ の $M/M/2$ モデルにおける客の平均滞在時間より短く、平均待ち時間は逆になる。平均滞在時間に関する最初の予想は正しいことが裏付けられた。平均待ち時間が逆転するのは、ラーメン屋を思い浮かべればよい。サービス処理能力は同じでも、イスの数を多くして早く座らせるようにすれば、待ち時間は少なくなるので不満は少ない、ということの理論的裏付けの一例である。

問題 7.4 n 人の客が二つの窓口で交互にサービスを受けているとする。つまり、ある窓口のサービスを受けたら次はもう一方の窓口でサービスを受ける。先客がいれば待ち行列に並ぶものとします。各窓口のサービス時間はいずれも率 μ の指数分布に従うものとします。このとき、1 番目の窓口に着客が k 人いる時間比率を計算しなさい。

略解：二つの窓口の間を行ったり来たりしている間に、最初どちらの窓口にいたのか分からなくなってしまう、ということが想像できる。したがって、どういう状態も等しくあり得るとすれば、一様分布を考えればよい。実際、一番目の窓口に着客が k 人いる確率を π_k とすると、次の平衡方程式が得られる。

$$2\mu\pi_k = \mu\pi_{k-1} + \mu\pi_{n-k+1} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

したがって、 $\pi_k = 1/n$ 、つまり一様分布

問題 7.5 ある工場では率 λ のポワソン過程に従い製品を作り出して行く。製品倉庫の容量は K で、倉庫がいっぱいになると生産を止める。率 μ のポワソン過程に従って客が到着し、製品を買って行く。倉庫に在庫がないときは客は手ぶらで立ち去るものとします。このとき、

- (1) 手ぶらで立ち去る客の比率を計算しなさい。
- (2) 製品の倉庫での平均滞在時間を計算しなさい。
- (3) 倉庫内の製品の個数の期待値を計算しなさい。

製品を買いに来た客は、在庫がない場合、待ち行列を作って待つことにする。ただし、待ち行列の長さは最長 n 人まで。到着客が長さ n の待ち行列を見た場合は手ぶらで立ち去るものとします。このとき、

- (4) 客数と製品数を状態として、平衡方程式を立てなさい。
- (5) それが解けたとして、平均系内客数をその解で表現しなさい。

略解：(1) 製品の在庫量を人口と考え、製品が出来る（在庫が一つ増える）ことを出生、客の到着（あれば製品が一つ減る、なければ変化なし）を死亡、と考えれば出生死亡過程が適用できる。出生率、死亡率とも一定なので、 $M/M/1/K$ モデルと同じ。手ぶらで帰るということは在庫が

無いということ意味するので、窓口の空いている状態の定常確率を計算すればよい。 $\rho = \lambda/\mu$ として、

$$\pi_0 = (1 + \rho + \rho^2 + \cdots + \rho^K)^{-1} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}}$$

(2)(1) と同じモデルで、平均滞在時間を計算すればよい。平均系内客数は

$$\begin{aligned} L &= \sum_{n=1}^K n \times \pi_n = \pi_0 \sum_{n=1}^K n \times \rho^n = \pi_0 \rho \left(\frac{1 - \rho^{K+1}}{1 - \rho} \right)' = \pi_0 \rho \frac{1 - (K+1)\rho^K + K\rho^{K+1}}{(1 - \rho)^2} \\ &= \rho \frac{1 - (K+1)\rho^K + K\rho^{K+1}}{(1 - \rho)(1 - \rho^{K+1})} \end{aligned}$$

平均滞在時間はリトルの公式を用いて計算すればよいが、到着率は生産を止めた状態では到着しないことを考えると λ ではなく、 $\lambda(1 - \pi_K)$ としなければいけない。

$$1 - \pi_K = \frac{1 - \rho^K}{1 - \rho} \pi_0 = \frac{1 - \rho^K}{1 - \rho^{K+1}}$$

なので、

$$W = \frac{L}{\lambda(1 - \pi_K)} = \frac{1}{\lambda} \frac{1 - \rho^{K+1}}{1 - \rho^K} L = \frac{1}{\mu} \frac{1 - (K+1)\rho^K + K\rho^{K+1}}{(1 - \rho)(1 - \rho^K)}$$

(3) 製品個数の期待値は L

(4) 在庫量の増減と待ち客数の増減を考える必要があるので、待ち行列が 2 本出来るモデルになるが、よく考えれば、同時に 2 本の待ち行列が出来ることはない。そこで、製品待ちの客数を j 、在庫製品数を k としたとき、 $m = n - j + k$ とすると、 $m = 0, 1, \dots, n + K$ の出生死亡過程としてモデル化できる。出生率は常に λ 、死亡率は常に μ 。従って、(1) と考え方は同じ。

(5)(4) の定常分布を $\{p_i\}$ とすると、客が n 人待っている確率は p_0 、 $n - 1$ 人待っている確率は p_1 、のように、与えられるので、平均系内客数は

$$L = \sum_{i=1}^n i \times p_{n-i} = \sum_{i=1}^n i \rho^{n-i} p_0$$

ただし、

$$p_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+n+1}}$$

問題 7.6 m 人の客が窓口一つの施設を利用する。サービス時間は率 μ の指数分布に従い、サービス終了後は率 θ の指数分布に従う時間後に戻ってきて待ち行列に並ぶものとします。

(1) 状態空間を定義し、平衡方程式を立てなさい。

その方程式の解を用いて、以下の計算をなさい。

(2) 客の到着率はいくつですか。

(3) 1 回の訪問あたり、施設に滞在する時間の期待値を計算しなさい。

略解：(1) 与えられたサービス施設を A とし、サービス率が θ の窓口が m 個ある施設を B とする。 m 人の客が施設 A, B の間を行ったり来たりしている、と考えればよい。あるいは、率 θ の指数分布に従う時間後に故障し、先着順に率 μ の指数分布に従う時間で修理され、元に戻る、という状況を考えても同じ。つまり、機械修理工モデルと同じ。

施設 A の客数 $k = 0, 1, 2, \dots, m$ を状態とすると、平衡方程式は次の通り

$$\begin{aligned} (\mu + (m - k)\theta)\pi_k &= (m - k + 1)\theta\pi_{k-1} + \mu\pi_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, m - 1 \\ m\theta\pi_0 &= \mu\pi_1, \mu\pi_m = \theta\pi_{m-1} \end{aligned}$$

(2) 到着率は状態 k のとき、 $(m-k)\theta$

(3) 定常分布は、 $a = \theta/\mu$ と置いて

$$\pi_k = \frac{m!}{(m-k)!} a^k \pi_0, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

滞在時間は次のように考える。ある客の到着時点で k 人の客がいる場合、その客の平均滞在時間は $(k+1)/\mu$ 。 k の取り得る範囲は 0 から $m-1$ までなので、条件付き確率 $\pi_{k|<m}$ を使う。

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{k+1}{\mu} \pi_{k|<m} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{k+1}{\mu} \frac{\pi_k}{1-\pi_m}$$

あまり整理された形にはならない。

問題 7.7 客が 1 時間に 40 人の割合でポワソン到着し、単一窓口でサービスを受ける。客が二人以下しかいないときはサービス時間は平均 2 分の指数分布に従う。三人以上になると、臨時雇いが手伝うため、平均 1 分の指数分布に従う。システムには四人の客しか入れない。このとき、

(1) 客が誰もいない確率はいくつか

(2) 1 日の働きに対して 1 万円もらったとする。働いた時間に応じて分けるとする臨時雇いはいくらもらえることになるか。

略解：(1) 出生死亡過程、 $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2/3, \lambda_4 = 0, \mu_1 = \mu_2 = 1/2, \mu_3 = \mu_4 = 1$ について解くと、

$$\pi_4 = \frac{64}{81} \pi_0, \pi_3 = \frac{32}{27} \pi_0, \pi_2 = \frac{16}{9} \pi_0, \pi_1 = \frac{4}{3} \pi_0, \pi_0 = \frac{81}{493} = 0.16$$

(2) 働いた時間に応じて分けるのであれば、臨時雇いの分け前は

$$\frac{\pi_3 + \pi_4}{\pi_1 + \pi_2 + 2(\pi_3 + \pi_4)} = \frac{96 + 64}{108 + 144 + 2(96 + 64)} = \frac{40}{143}$$

問題 7.8 工場の機械群は 1 時間当たり 6 台故障する。故障の間隔は指数分布に従うという。この機械群の故障修理を担当するために一人の修理工が雇われ、彼は 1 時間当たり 8 台の故障を修理する。修理時間も指数分布に従うという。機械が故障して使えないと 1 時間あたり 10 イエンの損、と見積もられている。単位時間当たりの損失はどれくらいか計算しなさい。

略解：機械は無数にあると考えて、 $\rho = \lambda/\mu = 0.75$ の $M/M/1$ モデルを当てはめる。平均故障台数 $\times 10$ が損失額になる。したがって、 $10\rho/(1-\rho) = 30$

問題 7.9 管理者は M か A を雇うつもりで調べている。 M は時給 3 イェン、 A は時給 C イェン、 M は 1 時間当たり 20 人の客を処理することができる。 A は 1 時間当たり 30 人の客を処理することができる。両方とも処理時間は指数分布に従うという。管理者は客を 1 分待たせると 1 イェンのコストが発生すると見積もっている。客はこのシステムに 1 時間当たり 6 人の頻度で到着するものとする。このとき、 M が雇われたとすると、単位時間当たりの損失額はいくらですか。 A の場合はどうなりますか

略解： $M/M/1$ の平均系内容客数を比較する問題。平均待ち時間は $\rho/(1-\rho)/\mu$ 。単位を分とすれば、それが一人当たりの待ちコスト。時間に直すためには到着客数 6 を掛ければよい。 M の場合は $\rho = 0.3$ なので、待たせるコストは $6 \times 3 \times 0.3/0.7 = 54/7 \approx 7.714$ 、人件費を払うと合計 10.714 イェンのコスト。 A の場合は $\rho = 0.2$ 、従って、待たせるコストは $6 \times 2 \times 0.2/0.8 = 3$ 、人件費を払うと合計 $3 + C$ イェンのコスト。時給が 7 イェンでも A を雇うべき。

問題 7.10 $M/M/1$ モデルで、客の待ち行列にいる時間が x 以下となる確率は次の式で与えられることを示しなさい。

$$\begin{cases} 1 - \frac{\lambda}{\mu} & x = 0 \text{ の場合} \\ 1 - \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-(\mu-\lambda)x}) & x > 0 \text{ の場合} \end{cases}$$

略解： W を一人の客の待ち時間とすると、到着時点で n 人滞在していれば、無記憶性から n 人分のサービス時間が待ち時間となる。したがって、到着時点の待ち客数で条件を付けて計算すればよい。モーメント母関数による計算が楽。 X を到着時点の滞在客数とすると、 X の確率母関数は

$$G_X(z) = E(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(X = k) = \frac{1 - \rho}{1 - \rho z}$$

サービス時間 S のモーメント母関数は $E(e^{\theta S}) = \mu/(\mu - \theta)$ 、したがって、 W のモーメント母関数を $M_W(\theta)$ とすると、

$$\begin{aligned} M_W(\theta) &= E(e^{-\theta W}) = E(E(e^{-\theta W} | X)) = \sum_{k=0}^{\infty} E(e^{-\theta S})^k P(X = k) \\ &= E_X\left(\frac{\mu}{\mu - \theta}\right) = \frac{1 - \rho}{1 - \frac{\lambda}{\mu - \theta}} = \frac{(1 - \rho)(\mu - \theta)}{\mu - \lambda - \theta} \\ &= 1 - \rho + \frac{\lambda(1 - \rho)}{\mu - \lambda - \theta} = 1 - \rho + \rho \frac{\mu - \lambda}{\mu - \lambda - \theta} \end{aligned}$$

これは W が確率 $1 - \rho$ で 0、確率 ρ でパラメータ $\mu - \lambda$ の指数分布に従っていることを意味する。

問題 7.11 (続き) W_Q^* を一人の客の待ち時間とすると、

$$W_Q^* = \begin{cases} 0 & \text{確率 } 1 - \lambda/\mu \text{ で} \\ \text{Exp}(\mu - \lambda) & \text{確率 } \lambda/\mu \text{ で} \end{cases}$$

と表せることを示しなさい。ただし $\text{Exp}(a)$ は率 a の指数分布に従う確率変数とする。また、この事実を使って W_Q^* の分散を計算しなさい。

略解：前半は前の問題と同じ。

$$E(W_Q^{*2}) = \rho \frac{2}{(\mu - \lambda)^2}$$

したがって、分散は

$$\rho \frac{2}{(\mu - \lambda)^2} - \frac{\rho^2}{(\mu - \lambda)^2} = \rho \frac{2 - \rho^2}{(\mu - \lambda)^2}$$

問題 7.12 ポワソン到着指数サービスの単一窓口システムに対して、次のようなルールを追加します。すなわち、サービスを終了した客は確率 α でシステムから退去し、確率 $1 - \alpha$ でもう一度待ち行列の最後尾に並んでサービスを受けなおす、というものです。このとき

(1) 平衡方程式をつくり、それが解けるための条件を求め、その条件の下で平衡方程式を解き、定常確率分布を計算しなさい。

(2) 最初のサービスを受けるまでの待ち時間の期待値を求めなさい。

(3) ちょうど n 回サービスを受けて退去する確率はいくつですか。

(4) 客の総サービス時間の期待値はいくつですか (3) を使いなさい)

(5) 客の総サービス時間の分布を求めなさい。(無記憶性がありますか)

略解：(1) サービス終了客が一旦退去してもう一度並び直す、という設定は、客の数の動きだけを考えれば、並び直す代わりにサービスをやり直すと考えてもよい。そうすると、やり直しの回数は幾何分布に従うので、全体のサービス時間はやはり指数分布になり、その平均は $1/(\alpha\mu)$ に延びる。結局、 $M(\lambda)/M(\alpha\mu)/1$ モデルと全く同じ。定常条件は

$$\rho = \frac{\lambda}{\alpha\mu} < 1$$

定常分布は

$$p(n) = (1 - \rho)\rho^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

(2) PASTA の性質から、平均系内客数の μ^{-1} 倍を計算すればよい。

$$\frac{1}{\mu} \frac{\rho}{1 - \rho}$$

(3) フィードバックの回数は幾何分布に従うので $\alpha(1 - \alpha)^{n-1}$

(4) $\alpha^{-1} \times \mu^{-1}$

(5) 幾何分布に従う個数の指数分布の和は指数分布になる

問題 7.13 あるスーパーマーケットは二つのレジを持ち、パラメータ λ のポワソン過程に従って到着する客は、共通の待ち行列で並び、順番にサービスされる。レジ 2 は混雑時のバッファのようなもので、客が誰もいないときはレジ 2 は閉鎖される。レジ 1 のサービス中に新たな客が到着して待ちが発生すると、レジ 2 を開けてサービスし、レジ 2 はサービスを終了したときに待ち客がいなければ再び閉鎖される。待ち客がいる限り、レジ 2 はサービスを続ける。レジ 1 は客がいなくても閉鎖はしない。レジのサービス時間は両方とも率 μ の指数サービス時間とする。このとき、

(1) p_n を客が n 人いる相対時間比率（十分に長い観測時間 T の間に客が n 人いる時間を T_n としたとき T_n/T ）に関する方程式を作り、それを解きなさい。

(2) 客が 0 人から一人に推移する率はいくつですか。二人から一人に推移する率はいくつですか

(3) 臨時のレジ係がレジにいない確率（相対時間）はいくつですか。

（ヒント $M/M/2$ とどこが違うのか、客の到着退去をトレースして状態推移図を作りながら考えなさい。単純な出生死亡過程にはなりません）

略解：客が一人しかいない場合、レジ 1 にいるのか、レジ 2 にいるのかを区別しないと、臨時のレジ係の稼働率が計算できないことに注意する。

(1) 客が一人の場合、その客を正規のレジ係がサービスしている状態を $1A$ 、臨時のレジ係がサービスしている状態を $1B$ と書くことにすると、平衡方程式は次のようになります。

$$\lambda p(0) = \mu(p(1A) + p(1B))$$

$$(\lambda + \mu)p(1A) = \lambda p(0) + \mu p(2)$$

$$(\lambda + \mu)p(1B) = \mu p(2)$$

$$(\lambda + 2\mu)p(2) = \lambda(p(1A) + p(1B)) + 2\mu p(3)$$

$$(\lambda + 2\mu)p(n) = \lambda p(n-1) + 2\mu p(n+1) \quad (n = 3, 4, \dots)$$

この方程式を解くと、 $\rho = \lambda/(2\mu)$, $p(1) = p(1A) + p(1B)$ として、

$$\begin{aligned} p(n) &= \rho^{n-1} p(1) \\ p(1) &= 2\rho p(0) \\ p(0) &= \frac{1-\rho}{1+\rho} \\ p(1A) &= \frac{2\rho(1-\rho)}{(1+2\rho)}, p(1B) = \frac{2\rho^2(1-\rho)}{(1+2\rho)(1+\rho)} \end{aligned}$$

(2) 客が 0 人から一人に推移する率は λ ですが、その一人は正規のレジ係の担当になり推移する先は状態 1A、二人から一人に推移する率は 2μ ですが、その推移先は 1A あるいは 1B が等確率。

(3) $p(0) + p(1B)$ が答え。

$$p(0) + p(1B) = \frac{1-\rho}{1+\rho} + \frac{2\rho^2(1-\rho)}{(1+2\rho)(1+\rho)} = \frac{(1+2\rho+2\rho^2)(1-\rho)}{(1+2\rho)(1+\rho)}$$

問題 7.14 $M/M/s/s$ モデルで到着率 λ 、サービス率 μ としたとき、平衡方程式を書き、系内客数の定常分布を計算しなさい。 $a = \lambda/\mu = 20$ として、いろいろな s に対して、系内客数が s 人いる定常確率を s の関数と見たときの関数のグラフを描きなさい。

略解：平衡方程式は次の通り。

$$\begin{aligned} (\lambda + n\mu)p(n) &= \lambda p(n-1) + (n+1)\mu p(n+1) \quad (n = 1, 2, \dots, s-1) \\ \lambda p(0) &= \mu p(1) \\ s\mu p(s) &= \lambda p(s-1) \end{aligned}$$

定常分布は

$$\begin{aligned} p(n) &= \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p(0) \quad (n = 1, 2, \dots, s) \\ p(0) &= \left\{ \sum_{n=0}^s \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right\}^{-1} = \frac{1}{1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots + \frac{a^s}{s!}} \end{aligned}$$

系内客数が s の定常確率 $p(s)$ は

$$p(s) = B(a, s) = \frac{\frac{a^s}{s!}}{1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots + \frac{a^s}{s!}}$$

と表される。 $B(a, s)$ はアーランの呼損式 (B 公式とも言う) と呼ばれる。大きな s に対する呼損式は次の漸化式を使って計算する。

$$\frac{1}{B(a, s)} = \frac{1}{B(a, s-1)} \frac{s}{a} + 1$$

Excel にはポワソン分布の累積分布関数、確率関数を計算する関数があるので、それを使うと簡単に計算できる。パラメータ a のポワソン分布の確率関数は

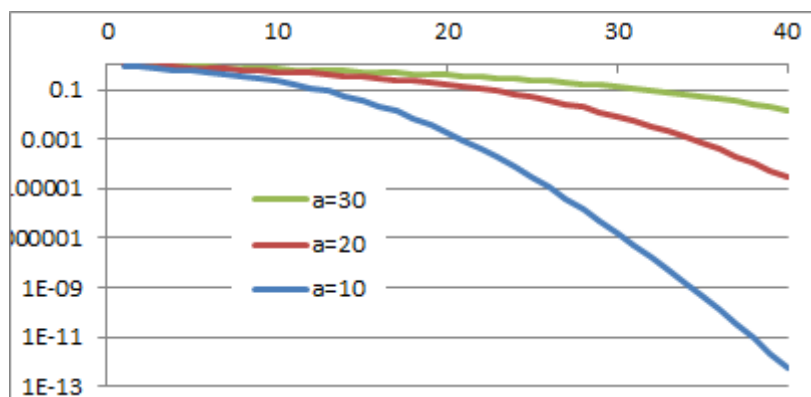
$$f(s) = P(X = s) = \frac{a^s}{s!} e^{-a}, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

なので、その累積分布関数を $F(s)$ と書くと、 $B(a, s)$ は

$$B(a, s) = \frac{f(s)}{F(s)}$$

と書ける。グラフを描くにはこれを利用すればよい。

窓口の数 s を増やすと、 $B(a, s)$ は急速に 0 に近づくので、対数目盛でプロットするとよい。たとえば次のようになる。



問題 7.15 (行列があまり長いと、並ばないで立ち去ってしまうという現象のモデル化) 客が到着したとき系内客数が n だったとすると、確率 r_n で行列の最後尾に並び、 $1 - r_n$ でサービスを受けずに立ち去るものとする ($n > N$ のとき $r_n = 0$ 、 $n \leq N$ のとき $r_n = 1$ としたものは有限待ち行列モデルと呼ばれる)。 $X(t)$ を時刻 t での系内客数とし、到着はパラメータ λ のポワソン過程、窓口は一つで平均 μ^{-1} の指数分布にしたがってサービスされる。

- (あ) $X(t)$ は出生死亡過程でモデル化できることを示し、出生率、死亡率を求めなさい。
- (い) 平衡方程式を書いて、それを解きなさい。
- (う) 長い時間観測したとき、サービスを受けずに立ち去る客の数の単位時間あたり平均、全体の到着客に対する比率を求めなさい。
- (え) $\{r_n\} = \{1, 1, 1, 1, 0.8, 0.5, 0.2, 0, 0, \dots\}$ としたとき、サービス率の変化に対して立ち去る客の比率がどう変化していくかを調べ、グラフ化しなさい ($\lambda = 1$ とする)

略解：(あ) $\{r_n\}$ を考えなければ出生死亡過程。 r_n の影響は出生率だけに表れ、 $X(t) = n$ のとき客が 1 増える率は λr_n となる。 r_n は確率で決まるので、この変更は出生死亡過程の制約の範囲内。

(い)

$$\begin{aligned}\lambda\pi_0 &= \mu\pi_1 \\ (\lambda r_n + \mu)\pi_n &= \lambda r_{n-1}\pi_{n-1} + \mu\pi_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

出生死亡過程の一般解から

$$\pi_n = R_n \rho^n \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} R_k \rho^k \right\}^{-1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ただし、

$$R_n = \prod_{k=0}^n r_k$$

- (う) T 時間の間に客数が n 人いる時間は $T\pi_n$ 、その間に到着してサービスを受けずに立ち去

る客数は $\lambda(1 - r_n)T\pi_n$ 、したがって、単位時間あたりの立ち去り客数は

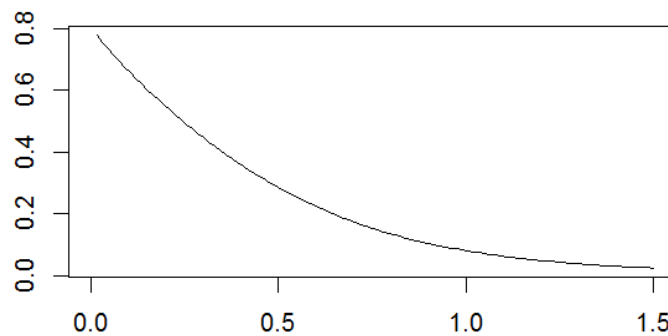
$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n (1 - r_n)$$

λ の係数が全体の到着客に対する比率になる。

(え) $\{R_k\} = \{1, 1, 1, 1, 0.8, 0.4, 0.08, 0, \dots\}$ となるので、立ち去る客の比率は、サービス率 μ の関数として、次のように表される。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n (1 - r_n) = \frac{0.2 \frac{0.8}{\mu^4} + 0.5 \frac{0.4}{\mu^5} + 0.8 \frac{0.08}{\mu^6}}{1 + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\mu^3} + \frac{0.8}{\mu^4} + \frac{0.4}{\mu^5} + \frac{0.08}{\mu^6}}$$

これをグラフ化すると、下図のようになる。有限の客しか存在しないので、定常条件はない。サービス率が小さくなるほど、立ち去る客の比率は大きくなる。



問題 7.16 (救急病院の急患と普通の患者に対する治療のモデル化) 一つの窓口に甲、乙 2 種類の客が来てサービスを要求する。甲組の客は乙組の客にたいして優先的にサービスされる。乙組の客がサービス中のところへ甲組の客が到着したら乙組の客のサービスを中断してすぐに甲組の客へのサービスが開始される。それぞれの組の客はパラメータ λ_1, λ_2 のポワソン過程で到着し、平均 μ_1^{-1}, μ_2^{-1} の指数分布にしたがってサービスされる。 $X_1(t), X_2(t)$ をそれぞれ時刻 t における甲組、乙組の系内客数とする。 $\rho_1 = \lambda_1/\mu_1, \rho_2 = \lambda_2/\mu_2$ としたとき

(あ) $X_1(t)$ は出生率 λ_1 、死亡率 μ_1 の出生死亡過程となり、 $\rho_1 < 1$ のとき定常分布が存在して、それが幾何分布で表わされることを示しなさい

(い) $\{X_1(t), X_2(t)\}$ はマルコフ過程になることを示し、微小時間内に状態 (j, k) から 1 ステップで推移する状態とその推移率を列挙しなさい。

(う) 平衡方程式を作りなさい。

略解：(あ) 甲組の客にとって、乙組はいないのと同じ。したがって、通常の出生死亡過程の結果が成り立つ。

(い) 乙組の動きを付け加えると、乙組の客の到着時点で $X_2(t)$ が 1 増え、サービスが終了すると 1 増える。甲組によってサービスが中断されても、 $X_2(t)$ に変化は起こらず、サービス時間が指数分布なので、中断の再開後も新たなサービスが開始されたと考えて良いので、次の状態変

化は過去とは無関係。推移率は

$$\begin{aligned} a_{(ik)(i+1,k)} &= \lambda_1, a_{(ik)(i,k+1)} = \lambda_2, \quad i, k = 0, 1, 2, \dots \\ a_{(00)(10)} &= \lambda_1, a_{(00)(01)} = \lambda_2 \\ a_{(ik)(i-1,k)} &= \mu_1, \quad i = 1, 2, \dots, k = 0, 1, 2, \dots \\ a_{(0,k)(0,k-1)} &= \mu_2, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

あとは行和が 0 になるように対角要素が決まる。

(う) 代表的な式だけ

$$\pi_{(ik)} = \lambda_1 \pi_{(i-1,k)} + \lambda_2 \pi_{(i,k-1)} + \mu_1 \pi_{(i+1,k)} + \mu_2 \pi_{(i,k+1)} 1_{\{i=0\}}$$

ただし、 1_A は A ならば 1、さもなければ 0 という数を表す記号。

問題 7.17 中間バッファが一つしかない二段の生産工程のモデル。 $M/M/1$ からの退去客はもう一つの指数サービスする単一窓口に着してサービスを受ける。第二の窓口がサービス中の場合は専用の待ち場所で待つが、そこもふさがっているときは、第一の（今サービスを終了した）窓口を占有して待ち、その後に並んでいる客のサービス開始をブロックする。第二窓口の待ち場所が空いたらそこに移動し、第一窓口のサービスが再開する。到着率を λ 、第 k 窓口のサービス率を $\mu_k (k = 1, 2)$ としたとき、定常条件はどうなりますか。その条件の下で、平均滞在時間を計算しなさい。ただし、 $\lambda = 0.5, \mu_1 = 1, \mu_2 = 1.5$ とします。

略解：最初の窓口の客数を i 、最初の窓口のサービスを終了した客で、まだシステムから退去していない客の数を j とすると、 (i, j) を状態とするマルコフ連鎖でモデル化出来る。その平衡方程式は以下の通り

$$\begin{aligned} \lambda \pi_{0,0} &= \mu_2 \pi_{0,1} \\ (\lambda + \mu_1) \pi_{1,0} &= \lambda \pi_{0,0} + \mu_2 \pi_{1,1} \\ (\lambda + \mu_1) \pi_{n,0} &= \lambda \pi_{n-1,0} + \mu_2 \pi_{n,1}, \quad n = 1, 2, \dots \\ (\lambda + \mu_1 + \mu_2) \pi_{0,1} &= \mu_1 \pi_{1,0} + \mu_2 \pi_{0,2} \\ (\lambda + \mu_1 + \mu_2) \pi_{n,1} &= \lambda \pi_{n-1,1} + \mu_1 \pi_{n+1,0} + \mu_2 \pi_{n,2}, \quad n = 1, 2, \dots \\ (\lambda + \mu_1 + \mu_2) \pi_{0,2} &= \mu_1 \pi_{1,1} + \mu_2 \pi_{0,3} \\ (\lambda + \mu_1 + \mu_2) \pi_{n,2} &= \lambda \pi_{n-1,2} + \mu_1 \pi_{n+1,1} + \mu_2 \pi_{n,3}, \quad n = 1, 2, \dots \\ (\lambda + \mu_2) \pi_{0,3} &= \mu_1 \pi_{1,2} \\ (\lambda + \mu_2) \pi_{n,3} &= \lambda \pi_{n-1,3} + \mu_1 \pi_{n+1,2}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

これを解くためには、母関数

$$P_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{n,i} z^n$$

を定義して、その連立方程式を解く必要がある。

定常条件は、最初の窓口の前に無限の客がいたときの退去率を μ_2^* とすると、

$$\lambda < \mu_2^*$$

μ_2^* を求めるためには、無限の客がいる場合のモデルを解けばよい。上の方程式の $i = 0$ の場合だけを抜き出して計算すれば定常分布が計算できるので、

$$\mu_2^* = \mu_2(1 - \pi_{0,0})$$

とすればよい。

$$\pi_{0,0} = \frac{1}{1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^3}$$

なので、

$$\mu_2 \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2} + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^3}{1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^3} > \lambda$$

問題 7.18 中間バッファを置かない代わりに 2 段目の工程に機械を 2 台置いた場合。M/M/1 からの退去客はもう一つの指数サービスする二つの窓口の一つに到着してサービスを受ける。第二の窓口が両方ともサービス中の場合は、第一の（今サービスを終了した）窓口を占有して待ち、その後に並んでいる客のサービス開始をブロックする。第二窓口のどちらかが空いたらそこに移動し、第 1 窓口のサービスが再開する。到着率を λ 、第 k 窓口のサービス率を $\mu_k (k = 1, 2)$ としたとき、定常条件はどうなりますか。その条件の下で、平均滞在時間を計算しなさい。ただし、 $\lambda = 0.5, \mu_1 = 1, \mu_2 = 1.5$ とします。

略解：前の問題と考え方は同じ。平衡方程式で、 $j \geq 2$ のとき、係数の μ_2 が $2\mu_2$ になる。

問題 7.19 部品はあらかじめ大量にストックされている生産工程のモデル。指数サービスする窓口が直列に三つつながっている。窓口 1、2、3 の順にサービスを受けて窓口 3 のサービスが終了したら退去する。窓口 1 の前には無限の客が待っていて、空くと直ちにサービスが開始される。窓口 2、3 の前には待つことは許されない。窓口 k のサービスが終了したとき、窓口 $k+1$ がふさがってれば、窓口 k でサービス終了した客はそこで待機し、窓口 k をブロックする（サービスを「ふさぐ」）。その後、窓口 $k+1$ が空いたら直ちに窓口 k をブロックしている客は窓口 $k+1$ へ進む。窓口 1 と 2 が同時にブロックされた状態で、窓口 3 のサービスが終了すると、窓口 1、2 の客は同時に次の窓口へ進む。窓口 k のサービス率を μ_k としたとき、このシステムの定常条件を求めなさい。その条件の下で、各窓口の稼働率を計算しなさい。また、 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$ のとき、システムのスループット（単位時間あたりの窓口 3 からの退去数）を計算しなさい。

略解：窓口 k の状態を n_k とする。ブロックされていないとき、 n_k はサービス中の客の数を表し、ブロックされているときは $n_k = b$ と書く。そうすると、このシステムは (n_1, n_2, n_3) を状態ベクトルとする連続時間のマルコフ連鎖によってモデル化することが出来る。その生成行列は以

下の通り。

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1,0,0) \\ (1,1,0) \\ (b,1,0) \\ (1,0,1) \\ (1,1,1) \\ (b,1,1) \\ (1,b,1) \\ (b,b,1) \end{matrix} & \begin{pmatrix} -\mu_1 & \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1 - \mu_2 & \mu_1 & \mu_2 \\ 0 & 0 & -\mu_2 & 0 \\ \mu_3 & 0 & 0 & -\mu_1 - \mu_3 \\ 0 & \mu_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 & \mu_1 & \mu_2 & 0 \\ 0 & -\mu_2 - \mu_3 & 0 & \mu_2 \\ 0 & 0 & -\mu_1 - \mu_3 & \mu_1 \\ \mu_3 & 0 & 0 & -\mu_3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} (1,0,0) \\ (1,1,0) \\ (b,1,0) \\ (1,0,1) \\ (1,1,1) \\ (b,1,1) \\ (1,b,1) \\ (b,b,1) \end{matrix} \end{matrix}$$

定常確率を $\pi(n_1, n_2, n_3)$ とすると、 $\pi(n_1, n_2, n_3)$ は平衡方程式を解いて、

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解は以下のように与えられる。

$$\left(\frac{4}{39}, \frac{5}{39}, \frac{8}{39}, \frac{4}{39}, \frac{2}{13}, \frac{1}{13}, \frac{1}{13}, \frac{2}{13} \right)$$

窓口 k の稼働率は、

$$a_k = \sum_{n_k=1} \pi(n_1, n_2, n_3)$$

で与えられるので、システムスループット b は

$$b = a_3 = \mu_3 \sum_{n_3=1} \pi(n_1, n_2, n_3) = \frac{22}{39} = 0.564$$

で与えられる。

問題 7.20 (ベルトコンベヤーに複数の人がはり付いて作業している場合のモデル化) 客が到着して最初の窓口が空いていればそこでサービスを受けて退去する。もしふさがっていれば、次の窓口でサービスを受ける。そこもふさがっている場合はサービスを受けずに立ち去るものとする。到着はパラメータ λ のポワソン過程にしたがい、窓口でのサービス時間は平均 μ_1^{-1}, μ_2^{-1} の指数分布にしたがっているものとする。 $X_1(t), X_2(t)$ をそれぞれ時刻 t における窓口 1, 2 の客の数とすると、 $\{X_1(t), X_2(t)\}$ は 4 状態のマルコフ過程になる。

(あ) 生成行列を求めなさい

(い) 平衡方程式を作り、それを解きなさい

(う) $\lambda = 1, \mu_1 = 1, \mu_2 = 2$ のとき呼損率 (損失確率) を計算しなさい

(え) $\lambda = 1, \mu_1 = 2, \mu_2 = 1$ のとき呼損率 (損失確率) を計算しなさい。(う) と比較して何がわかりますか。

(お) 能力の違う二つの窓口はどちらを先に置いたほうが能率が上がりますか。

略解：ベルトコンベヤというよりは、コールセンターの方が分かりやすい？

(あ)

$$A = \begin{matrix} (0,0) \\ (1,0) \\ (0,1) \\ (1,1) \end{matrix} \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & \\ \mu_1 & -\lambda - \mu_1 & & \lambda \\ \mu_2 & & -\lambda - \mu_2 & \lambda \\ & \mu_2 & \mu_1 & -\mu_1 - \mu_2 \end{pmatrix}$$

(い)

$$\begin{aligned} \lambda\pi_{00} &= \mu_1\pi_{10} + \mu_2\pi_{01} \\ (\lambda + \mu_1)\pi_{10} &= \lambda\pi_{00} + \mu_2\pi_{11} \\ (\lambda + \mu_2)\pi_{01} &= \mu_1\pi_{11} \\ (\mu_1 + \mu_2)\pi_{11} &= \lambda\pi_{10} + \lambda\pi_{01} \end{aligned}$$

これを解いて、

$$\mu_1\mu_2(2\lambda + \mu_1 + \mu_2) : \mu_2(\lambda + \mu_1 + \mu_2) : \lambda\mu_1 : \lambda(\lambda + \mu_2)$$

(う)(え) $\lambda = 1, \mu_1 = 1, \mu_2 = 2$ ならば $10 : 8 : 1 : 3$ 。 $\lambda = 1, \mu_1 = 2, \mu_2 = 1$ ならば $10 : 4 : 2 : 2$ 。従って呼損率はそれぞれ、 $\frac{3}{22} = 0.136, \frac{2}{18} = 0.111$ 。この結果より、優先的に客を受け付ける窓口 1 のサービス率を大きくした方が呼損率は小さくなる。