

確率過程とその応用

逆瀬川浩孝

目次

1	確率過程	1
1.1	いくつかの例	1
1.2	定式化	3
1.3	モデル分析の目的	4
1.4	サンプルパス	4
1.5	状態推移図	5
2	確率の基礎知識	7
2.1	事象と確率	7
2.2	確率	9
2.3	確率変数 (random variable)	11
2.4	期待値	12
2.5	期待値の応用	15
2.6	いくつかの確率規則、離散分布	17
2.7	いくつかの確率規則、連続分布	19
2.8	条件付き確率	22
2.9	極限定理	29
2.10	数学の公式	32
3	ポワソン過程	37
3.1	2項過程	37
3.2	計数過程	39
3.3	ポワソン過程	39
3.4	ポワソン過程の特徴	41
3.5	複合ポワソン過程	47
3.6	非定常 (非斉時) ポワソン過程	50
3.7	再生過程 (renewal process)	51
4	ランダムウォークとブラウン運動	54
4.1	ランダムウォーク	54
4.2	対称なランダムウォーク	55

4.3	非対称なランダムウォーク	64
4.4	ランダムウォークとマルチンゲール	71
4.5	ブラウン運動	74
4.6	金融工学への応用	77
5	マルコフ連鎖	83
5.1	マルコフモデル	83
5.2	マルコフ連鎖	84
5.3	極限確率	91
5.4	定常解析	98
5.5	吸収的マルコフ連鎖	101
5.6	分枝過程 branching process	105
6	マルコフ過程	112
6.1	マルコフ過程モデル	112
6.2	指数分布の性質	114
6.3	推移確率関数	115
6.4	コルモゴロフの微分方程式	116
6.5	定常解析	118
6.6	出生死亡過程	119
7	待ち行列モデル	126
7.1	確率モデルの枠組み	126
7.2	基本モデル (M/M/1)	127
7.3	M/M 型拡張モデル	131
7.4	非マルコフ型待ち行列モデル	136
7.5	演習問題、その 1	140
7.6	ネットワーク型待ち行列モデル	144
7.7	待ち行列モデルにおける最適化問題	149

1 確率過程

確率過程とは、ランダム要因を含むシステムの時間的変動の様子を分析するために使用される数理モデルである。具体的には、ある時点におけるシステムの状態を時間依存の確率変数（あるいは確率ベクトル）として捉え、それらをすべて集めた確率変数の族のことを指す。システムの状態から定まる特性量の性質を知ること、それによって特性量の将来予測を行ったり、ランダム変動を規定するパラメータを動かすことによって特性量の感度分析を行ったり、最適化問題を解くことがモデル化の目標である。

1.1 いくつかの例

例 1.1 株価の変動：次の図は、日経 225 平均株価終値のデータを時系列グラフで描いたものである。株価の推移に特別な規則性はなく、この後どのように変動するのか、予想することは困難である。これを見て、株価の動きは確率的に変動している、と考えるのは自然であろう。その確率モデルとして、明日の株価、明後日の株価、 n 日先の株価、がそれぞれ確率変数としてモデル化すると、株価の確率過程モデルができる。これを使って、確率変動を現在までの株価の動きから将来の株価（から計算される指標）を予測して、賢い投資行動を考えたい。ある日を基準にして n 日目の株価終値を X_n とすると、 $\{X_0, X_1, X_2, \dots\}$ は確率過程モデルとしてモデル化できる。

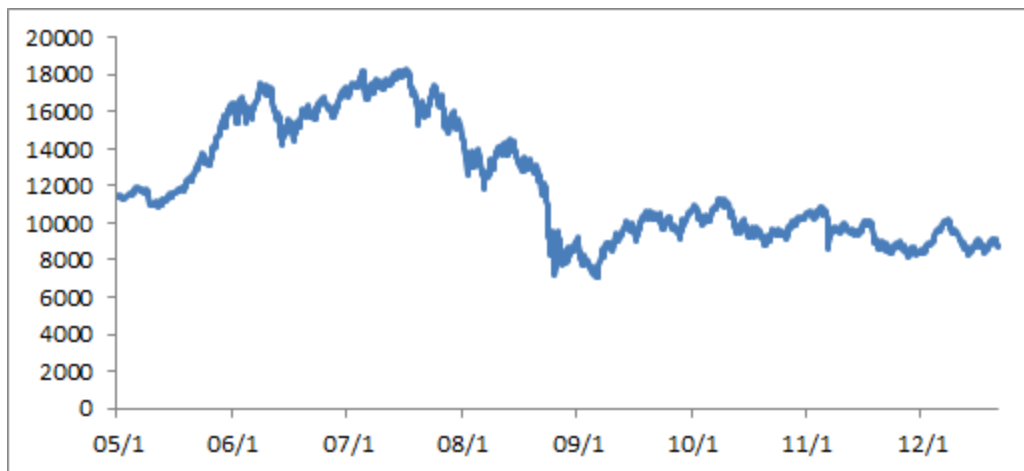


図 1 日経 225 平均株価終値の推移

株価に限らず、金利の変動、為替の変動、など金融市場における指標の時間変動は企業活動にとって重大な意味を持つため、意思決定者にその変動のモデルを提供することが必要である。。

例 1.2 機械故障：生産ラインは時々故障により停止する可能性がある。あらかじめ決められた出荷計画がラインの不調によって狂わされることは損失をもたらす。故障はランダムに発生するため、故障発生を織り込んだ意思決定が必要である。

例 1.3 サプライチェーン：チェーンを構成するプレーヤーが予定通り動けば目標達成となるが、

市場の需要、原料調達の不確実性など、不意のアクシデントに対処するには、将来の出来事を数量的に予測しなければならない。

例 1.4 携帯電話キャリアのシェア（ブランドスイッチ）：商品のシェアは気まぐれな客の購買行動によって決まる。とはいえ、そこに確率的な規則性を見だし、将来のための施策を講じなければいけない。

例 1.5 喫煙率の経年変化：それぞれ個人の異なる事情が集まって、集団としての喫煙率という数字が得られるが、その変化は、全体として減少傾向にあるものの、翌年の喫煙率を予測することはむづかしい。

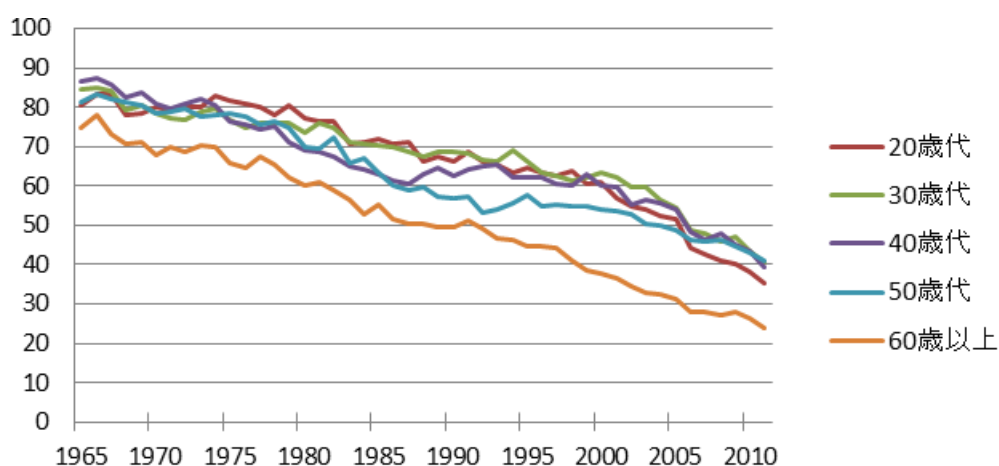


図 2 年代別喫煙率の経年変化

例 1.6 東京六大学リーグ戦の順位：早稲田と慶応の順位を比べ、早稲田が上ならば +1、さもなければ -1 として、その数値を累積すると、次のようなグラフが得られる。これから先の動きを予測するモデルはどうすればよいか？

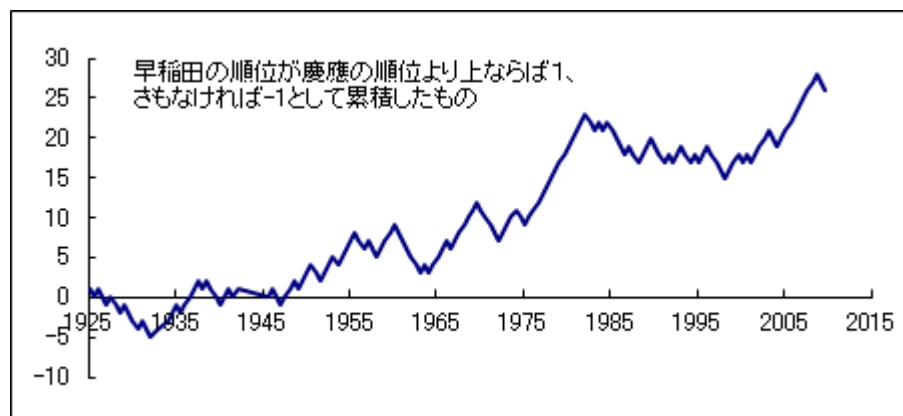


図 3 東京六大学野球の順位（早慶の順位差）

1.2 定式化

「時刻 t 」におけるシステムの状態（を数量化したもの）を確率変数 $X(t)$ で表し、考察の対象となる時刻の集合を T としたとき、 $\{X(t), t \in T\}$ を確率過程という。例えば「日経平均株価」、例えば「（ある商品の）在庫量」、例えば「機械の状態（故障中ならば 1、稼働中ならば 0）」など、が「システム状態」にあたる。ちょっと複雑なシステムの場合は、状態はベクトルで表現するのが適切かもしれない。その場合でも、状態（ベクトル）から決まるある特性量（スカラー）の値をシステムの状態と見なせば、スカラー状態の確率過程を扱うことになる。ここでは、状態は主としてスカラーと考える。 $X(t)$ の取り得る値全体を状態空間といい S で表す。時刻の集合 T は時間パラメータ集合と呼ばれる。

1.2.1 時間パラメータ

時間パラメータ集合は、大きく分けて連続の場合と不連続の場合のケースがあり、扱いが異なる。確率過程は、時間パラメータ集合が連続ならば連続時間の確率過程、時間パラメータ集合が離散ならば離散時間の確率過程、と呼ばれる。

連続時間パラメータの場合、 $T = [0, \infty)$ とすることが多く、その場合、確率過程は $\{X(t), t \geq 0\}$ と書かれる。特に断らないかぎり、連続時間の確率過程としてはこの形を扱う。有界な区間 $T = [a, b]$ 、あるいは実数全体 $T = (-\infty, \infty)$ とすることも多い。

時間パラメータ集合が離散の場合は $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ とすることが多く、その場合、確率過程は $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ と書かれることが多い。以下で扱う離散時間確率過程はほとんどこの場合である。一般には $T = \{t_0, t_1, t_2, \dots\}$ 、あるいは、すべての整数、とする場合もある。

「時間パラメータ」は「時刻」に限定されるものではない。例えば、生産ラインから出荷される製品の故障をチェックするためのモデル化を考えるならば、 X_n は n 番目に出荷する製品の状態を表す確率変数（不良品ならば 1、正常ならば 0）と考えると都合がよいので、その場合は n は製品番号を表すことになる。光ファイバーの傷をチェックするための確率過程モデルとして、 $X(t)$ をファイバーの終端から長さ t の点での状態を表す確率変数と考えると、 t は長さを表す。

1.2.2 状態集合

$\{X(t), t \in T\}$ の取り得る値をすべて集めたものを状態空間、あるいは状態集合と言い、 S で表す。状態集合は、機械の状態（故障が 1、稼働が 0）や株価のように離散であったり、ダムの水量的ように連続であったりする。 $X(t) = s \in S$ のとき、確率過程は時刻 t で状態 s にいる（あるいは、ある）という。 $X(0)$ は初期状態と呼ばれる。

1.2.3 多様なモデル化

株価は取引があった時点で変化するので、株価変動の確率過程は、取引時点列 $\{t_n\}$ ごとに確率変数を与える離散時点の確率過程 $\{X(t_n), n = 0, 1, 2, \dots\}$ でモデル化するのが正確であるが、どのような問題解決のためのモデルか、ということを考えると、そこまで精密なモデルは必要とされないことが多い。一日の最後の終値の動きだけを追いかけるので良ければ n を経過日数として $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ というモデルを考えることになる。

生産システムのように、連続時間で動いている場合でも、人間が実際に観測できるのは秒単位

のように離散的なふるまいなので、離散の確率過程モデルが完全に分かっていたら実用上は困らないかもしれない。しかし、モデル分析の基本的な道具は数学で、数学は連続化した方が扱いやすい。そのために、ある種の理想化を仮定して連続時間の確率過程モデル $\{X(t), t \geq 0\}$ を扱うことも多い。

1.3 モデル分析の目的

確率過程は時間の流れに沿って生起するランダムな現象を説明する数理モデルで、ランダム現象を説明するとともに、そのモデルを使って予測することが大きな目的である。予測は過去の出来事が重要な情報源で、ある事象が起きたから将来、この事象が起きる可能性が大きい、というような推論をすることになる。したがって、区間 $[0, t]$ で起きる事象 C が実際に起きたとして、将来 $t + s$ 時点で起きる事象 A の確率 $P(X(t) \in A \mid C)$ という条件付き確率を求めることが中心的課題となる。そのため、条件付き確率の基本的な道具である全確率の公式をふんだんに使った計算が必要になる。

$$P(A) = \sum_i P(A \cap C_i) = \sum_i P(A \mid C_i)P(C_i) \quad (1.1)$$

過去の履歴 $\{X(u) = x(u) (0 \leq u \leq s)\}$ を使えば将来時点 t の状態に関連する事象 $\{X(t) \in A\}$ の条件付き確率が分かるということ、それ自体は問題ないのだが、 s が大きくなったとき、そのすべての履歴に対する条件付き確率を決めることは不可能。実際の動きを見ても、それほど過去の履歴に強く依存するということは考えにくい。従って、厳密には現実の動きのある部分を無視することになるが、適度に過去と訣別することが必要。一般にモデルは、現実のシステムの問題点を探り、対応策を考えるための道具であって、現実をすべて反映させたものが最良のモデルとは限らない。目的にかなう範囲で簡単なものほど扱いやすい (オッカムの剃刀 Occam's razor、あるいはケチの原理)。

1.3.1 モデル作成のトレードオフ

モデル化を精密化させるほど決定しなければいけないパラメータの数は増える。パラメータは推定しなければいけないが、その推定の精度は使えるデータの個数に依存する。推定すべきパラメータの個数が増えるほど、誤差は増える。精密なモデルを作って適当なパラメータを使うか、単純なモデルを作って正確なパラメータ推定をするか (理論は出来るだけ単純にせよ (アインシュタイン))。

1.4 サンプルパス

確率過程の動きは確率計算をすることにより、どのような傾向になるか、ということを知ることが出来るが、具体的なイメージは掴みにくい。将来観測したらこうなるかもしれないという $\{X(t), t \in T\}$ の仮想実現値 $\{x(t), t \in T\}$ を、 t の関数としてグラフ化したものを、確率過程 $\{X(t), t \in T\}$ のサンプルパスという。統計におけるサンプルと同じ考え方で、標本関数、見本関数とも言う。

例 1.7 $X(t)$ を t 日後の日経平均株価終値とすると、そのサンプルパスは最初の図のようなもの、つまり、増減をランダムに繰り返す、突発事故により、急増、急減する可能性がある、

というようなパターンを描く。図では連続なグラフに見えるが、データは一日一つしかなく、確率過程としては離散時間パラメータ上で定義されている。 t の関数としてグラフ化すれば、 $(0, X(0)), (1, X(1)), (2, X(2)), \dots$ のようにとびとびの点がプロットされるが、それらを折れ線で結んで表示することが多い。

例 1.8 $X(t)$ を時刻 t における生産ラインの状態とする。具体的には時刻 t でラインが動いていれば $X(t) = 0$ 、止まっていれば $X(t) = 1$ とする。この $X(t)$ のサンプルパスは故障した時点で 1 にジャンプし、故障回復した時点で 0 にジャンプする、それ以外の時点では状態変化しない、というパターンを繰り返す。

練習 1.1 $X(t)$ を来年元旦から数えて t 日目の西早稲田キャンパスでの火災発生件数としたとき、 $X(t)$ のサンプルパスを描きなさい。

練習 1.2 連続時間の確率過程 $\{X(t), t \in T\}$ としてモデル化できそうな例を探し、確率変動の規則を適当に定義して、そのサンプルパスを描きなさい。

1.5 状態推移図

状態が離散の場合、状態間の推移可能性、推移のしやすさは、状態をノード、状態間の推移を有向矢印で表したネットワーク表現が分かりやすい。このような有向ネットワークを状態推移図という。

例 1.9 4 枚のコインをテーブルの上に置く。ランダムに 1 枚取ってひっくり返す、ということ を 1 回の試行とする。 n 回試行後の表のコインの枚数を X_n とすると、 $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ は確率過程になる。この確率過程の状態推移図は、ノードが 0, 1, 2, 3, 4 の五つ、1 回の試行を行う毎に状態が ± 1 変化するので、矢印はノード $k (= 0, 1, 2, 3)$ からノード $k + 1$ へ向かうもの、ノード $k (= 1, 2, 3, 4)$ からノード $k - 1$ へ向かうもの、合計 8 本。

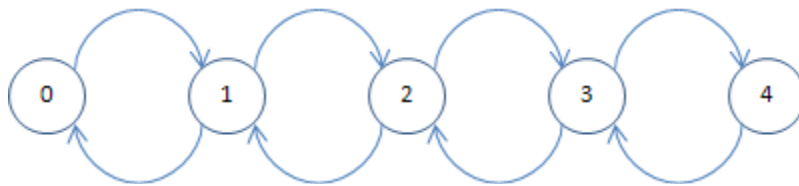


図 4 コイン返し実験の状態推移図

連続時間の例としては、 $X(t)$ を時刻 t における生産ラインの状態とする。上述のように「故障 ($= 1$)」「稼働 ($= 0$)」の 2 状態ならば、ノードは 0, 1、矢印は $0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0$ の 2 本だけ。コイン 1 枚のモデルと同じ、ただし、コインをひっくり返すタイミングが不定。

練習 1.3 5 試合のプレーオフ（どちらかが 3 勝したら終わり）の経過を確率過程と考えた場合、状態推移図を描きなさい。

演習問題

問題 1.1 現実的な確率過程 $\{X(t), t \in T\}$ を定義して、状態推移図を描きなさい。また、ランダム事象を想定しながらサンプルパスを描き、どういうランダム事象が想定されているのか、説明しなさい。

問題 1.2 研究テーマの周辺で確率過程でモデル化できる問題を取り上げ、ランダム要因を説明しサンプルパス、あるいは状態推移図を描きなさい。

2 確率の基礎知識

2.1 事象と確率

ランダムに起きる現象の起こりやすさ、起こりにくさを説明するための数理モデルが確率モデルである。モデルを記述するために用語を定義する必要がある。「ランダム試行」の結果起こりうる「事象」の「確率」を知りたい。

2.1.1 ランダム試行、標本、標本空間、事象

コイン投げによってランダムに表が出たり裏が出たりするように、ある試行によって幾通りかの結果がランダムに生起するような状況を考える。このような試行はランダム試行と呼ばれ、ランダム試行によって起こりうる結果の一つ一つを標本といい、標本全体を標本空間という。標本空間を Ω と記す。標本空間の任意の部分集合を事象という。特に一つの標本点からなる事象は根元事象と呼ばれる。

例 2.1 コインを 2 回投げるという試行での標本は結果を並べた「表表」「表裏」「裏表」「裏裏」の 4 通り。標本空間はその 4 通りの結果を集めたもの。 $\{\text{「表裏」, 「裏表」}\}$ という部分集合は 2 回のうち 1 回は「表」という事象。 $\{\text{「表表」, 「裏裏」}\}$ という部分集合は 2 回の結果が同じ、という事象を表す。

任意の事象 A に対して A が起きない、という事象を A の余事象といい、 A^c で表す。 Ω 自身は Ω の部分集合にもなっているので事象となるが、それを全事象という。全事象はランダム試行をすれば「何かが起きる」という事象である。全事象の余事象は空事象といい ϕ で表す。意味のない事象であるが、計算の都合上定義しておく必要がある。

事象 A, B のどちらかが起きるという事象を A, B の和事象と言い、 $A \cup B$ と記す。事象 A, B が同時に起きるという事象を A, B の積事象と言い、 $A \cap B$ と記す。 $A \cup B$ の余事象は、どちらも起きないということなので $A^c \cap B^c$ と書くことが出来る。つまり、

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

という式が成り立つ。これは集合論におけるドモルガンの公式と同じ。積事象が空事象であるような二つの事象は互いに排反と言われる。

練習 2.1 A, B を事象としたとき、次の式が成り立つことを証明しなさい。

$$\begin{aligned} A \cap A^c &= \phi \\ A &= (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \\ A \cup B &= A \cup (B \cap A^c) \end{aligned}$$

2.1.2 事象の集合

ランダム試行で起こりうる様々な事象に対して、それらの事象の起こりやすさを数量化したものが確率である。そこで、確率を決めるために各事象に対して数量を割り当てる必要があるが、

そのために、「事象」の範囲を確定させておく必要がある。 Ω が離散集合の場合は、「あらゆる」部分集合を事象と定めることが多い。これを 2^Ω と記すことがある。

2^Ω は集合として、 $\cup, \cap, ^c$ という三つの演算に対して閉じている、という性質がある。すなわち、 2^Ω の任意の要素を A, B とすると、 $A \cup B, A \cap B, A^c$ はいずれも 2^Ω の要素になっている。事象の集合として、 2^Ω 以外のものを考える場合も、この三つの演算に対して閉じているという性質を要求する。

例 2.2 コイン投げでおもて (H)、うら (T) の二通りを標本とすると、 $\Omega = \{H, T\}$ となり、 $2^\Omega = \{\Omega, \{H\}, \{T\}, \phi\}$ は上の 3 条件を満たす

例 2.3 2 回のコイン投げで $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$ とする。「表が 2 回続けて出るかどうか」ということしか興味がない場合は $\{\Omega, \{HH\}, \{HH\}^c, \phi\}$ という部分集合族を考えるのが自然である。この集合は、確かに三つの演算に対して閉じている。

2.1.3 σ 集合族

標本空間が連続無限となったとき、数学的な分析と整合させるために、事象の範囲を整える必要がある。次の条件を満たす事象の集合 $\mathcal{F}$ は σ 集合族、あるいは σ 集合体、あるいは σ 代数 sigma algebra などと呼ばれる。

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F}$ ならば $A^c \in \mathcal{F}$
3. $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ ならば $A_1 \cup A_2 \cup \dots \in \mathcal{F}$

有限の σ 集合族ならば、ドモルガンの公式を使って条件 2 と条件 3 を組み合わせると、積事象も事象になる。つまり、ある事象 (達) の余事象、和事象、積事象はすべて事象でなければいけない。この性質は無限集合の場合にも成り立つことが証明できる。したがって、 σ 集合族は $\cup, \cap, ^c$ という三つの演算に対して閉じている。

逆に、任意の部分集合の集まりを含み、三つの演算に対して閉じている σ 集合族を作ることができる。事象の集合 $\mathcal{G}$ が与えられたとき、その要素である事象の余事象、積事象、和事象をすべて含むような集合族が新たに定義できる。その集合族に対して、同じ操作を繰り返していくと、最終的に余事象、積事象、和事象を計算しても新たな事象が生成できないという状態になる。つまり、余事象、積事象、和事象を取るという演算に対して閉じた集合族が生成できる。この集合族を $\sigma(\mathcal{G})$ と記し、 $\mathcal{G}$ から生成される σ 集合族という。例えば、2 回のコイン投げの例で、 $\{HH\}$ から生成される σ 集合族は次のようにして構成できる。1 より Ω を含み、2 より $\{HH\}^c, \Omega^c (= \phi)$ を含む。 $\mathcal{F}' = \{\Omega, \{HH\}, \{HH\}^c, \phi\}$ は上で見たように σ 集合族になっているので、 $\mathcal{F}'$ は $\{HH\}$ から生成される σ 集合族である。

$\Omega = R$ (実数全体) としたとき、 $[a, b]$ という閉区間全体を $\mathcal{G}$ としたとき、 $\sigma(\mathcal{G})$ をボレル集合族といい $\mathcal{B}$ と記す。実際の問題の確率モデルとして出てくるような事象はすべて含まれるので、通常は $\mathcal{F} = \mathcal{B}$ とすることが多い。

例 2.4 一般に、ランダム試行である事象 A が起きるかどうかに関心がある場合、 $\{\Omega, A, A^c, \phi\}$ は事象 A を含む (最小の) σ 集合族になる。

例 2.5 $a < b$ とすると、 $\cup [a, b - \frac{1}{n}] = [a, b)$ なので、 $[a, b] \in \mathcal{G}$ ならば、 $[a, b] \in \sigma(\mathcal{G})$ 。同じような論法で、いろいろな区間（想像できるたいていの区間）が $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{B}$ に含まれる。

練習 2.2 三つの事象 A, B, C が起こりうるランダム試行、すなわち A, B, C は互いに排反で $\Omega = A \cup B \cup C$ が成り立つようなものとしたとき A, B, C を含む最小の σ 集合族を決定しなさい。

2.2 確率

定義 2.1 σ 集合族 $\mathcal{F}$ の要素に 0 以上 1 以下の数値を割り当てる関数 $P(\cdot)$ で、以下の条件を満たすものを確率と言い、標本空間とその事象の集合 $\mathcal{F}$ 、事象の確率 P を合わせた三つ組み $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間という。

1. 任意の事象 $A \in \mathcal{F}$ に対して、 $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. 互いに排反な事象 $A, B \in \mathcal{F}$ に対して、次の式が成り立つ

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (2.1)$$

この 3 条件は確率の公理とも呼ばれる。 P は確率測度、あるいは確率分布とも呼ばれる。

例 2.6 2 回のコイン投げの例で言うと、 $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$ で、そのすべての部分集合を集めたものを $\mathcal{F}$ としたとき、 $\mathcal{F}$ は σ 集合族になり、

$$P(HH) = 0.4, P(HT) = P(TH) = P(TT) = 0.2$$

と決めれば $\mathcal{F}$ の任意の要素に対して $P(A)$ を決めることが出来る。たとえば、 A としてちょうど 1 回表が出るという事象とすると、 $P(A) = P(\{HT, TH\}) = P(HT) + P(TH) = 0.4$ のように、公理 3 を使って計算できる。

例 2.7 2 回のコインを投げて 2 回とも表かどうかということだけに興味がある場合は $\mathcal{F} = \{\Omega, \{HH\}, \{HH\}^c, \emptyset\}$ とするのが自然。この場合は、例えば $P(HH) = 0.4$ と決めれば、すべてが決まる。このモデルでは、 $\{TT\} \in \Omega$ は $\mathcal{F}$ の要素ではないので、 $P(TT)$ は計算できない（興味がないので、決める必要がない、どうでも良い）。

練習 2.3 次の等式を証明しなさい。

$$\begin{aligned} P(A \cap A^c) &= 0 \\ P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

2.2.1 確率関数

実際に確率を定義することはこの定義には含まれていない。問題が与えられたときに、公理 1, 2, 3 に矛盾しないように決めれば良い。標本空間が離散の場合は、 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ に対して、

和が 1 になるような非負の数値列 $\{p_1, p_2, \dots\}$ を決めて $P(\{\omega_i\}) = p_i$ とし、任意の部分集合 A に対して、その確率 $P(A)$ を

$$P(A) = \sum_{i: \omega_i \in A} p_i \quad (2.2)$$

によって定義する。 $\mathcal{F} = 2^\Omega$ (Ω のあらゆる部分集合) とすると、この確率の定義が公理の 3 条件を満たすことは容易に確かめることができる (確かめなさい)。 $\{p_1, p_2, \dots\}$ を確率関数という。

例 2.8 $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$, $p_1 = \dots = p_6 = \frac{1}{6}$ とすれば、(歪んでいない) サイコロ実験の確率空間モデルになる。

例 2.9 $0 < p < 1$ を満たす定数 p に対して、 $\Omega = \{1, 2, \dots\}$, $p_i = (1-p)p^{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots$) と定義すると、コイン投げで表が初めて出るまでのコイン投げの回数に関する確率空間モデルになる。 p は表の出る確率である。

2.2.2 累積分布関数、密度関数

連続な標本空間の場合は、離散のように確率を決めようとする、各点の確率がゼロになってしまうので $\mathcal{F}$ のすべての要素 (事象) に対して直接非負の実数値を定義する必要がある。 $\Omega = R$ (実数)、 $\mathcal{F} = \mathcal{B}$ としたとき、非負の連続関数 $f(x)$ で、 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ を満たすとき、任意の区間 $(-\infty, x]$ の確率 ($F(x)$ と記す) を

$$F(x) = P((-\infty, x]) = \int_{-\infty}^x f(x)dx \quad (2.3)$$

で定義する。任意の事象 ($\mathcal{F}$ の要素) はすべて、この $F(x)$ から計算できることが分かっている。たとえば、 $a < b$ としたとき、区間 $[a, b]$ の確率は、確率の公理から $(-\infty, b] = (-\infty, a] \cup (a, b]$ なので)

$$P([a, b]) = P((a, b]) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx \quad (2.4)$$

と計算できる。この $F(\cdot)$ を連続確率空間の累積分布関数といい、 $f(x)$ を密度関数という。

例 2.10 $\Omega = R$ としたとき、

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad -\infty < x < \infty \quad (2.5)$$

とすると、 $f(x)$ は密度関数になり、任意の区間の確率を定義することが出来る。この確率分布を (標準) 正規分布という。測定値の誤差の確率モデルとして使われる。不良品が発生するという事象 (誤差の絶対値がある値より大きい) の確率は密度関数の積分で計算できる。

例 2.11 $\Omega = [0, \infty)$ としたとき、

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0 \quad (2.6)$$

は累積分布関数となり、その導関数 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ は密度関数になる。この確率分布をパラメータ λ の指数分布という。いつ壊れるか分からない機械部品の寿命の確率モデルとして使われる。ある期間内では壊れないという事象 (寿命がある値より大きい) の確率は $F(x)$ の補分布 $1 - F(x)$ で与えられる。

2.3 確率変数 (random variable)

ランダム事象が起きた時に定まる数量を、そのランダム事象（根元事象、標本点）に対応させる関数を確率変数という。数学的には標本空間の標本点 ω に、実数値に対応させる関数 $X(\omega)$ を確率変数という。つまり、ランダム試行によって一つの根元事象 $\{\omega\}$ が起きたときに、 $X(\omega)$ が定まると考える。取りうる値によって「離散確率変数」「連続確率変数」などという。離散と連続が混在している「混合（複合）確率変数」という場合もある。

例 2.12 さいころを振って偶数ならば 1 勝ち、奇数ならば 1 負けるとい賭をする場合、 X を 1 回の賭による持ち金の変化とすると、標本空間を $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ として、

$$\begin{aligned} X(1) &= X(3) = X(5) = -1 \\ X(2) &= X(4) = X(6) = 1 \end{aligned}$$

と書くことが出来る。これは標本空間から実数への関数の形をしている。あるいは

$$\{\omega; X(\omega) = 1\} = \{2, 4, 6\} \subset \Omega, \{\omega; X(\omega) = -1\} = \{1, 3, 5\} \subset \Omega$$

と書くことが出来て、逆写像を考えると、

$$X^{-1}(1) = \{2, 4, 6\} \subset \Omega, X^{-1}(-1) = \{1, 3, 5\} \subset \Omega$$

ということも言える。

2.3.1 確率変数の確率規則、確率分布

確率変数は、標本空間から実数への写像なので、標本点を根元事象と考えると、確率変数がある値の範囲を取る確率を定義することができる。取り得る値が離散ならば

$$P(X = a) = \sum_{i: X(\omega_i) = a} p_i \quad (2.7)$$

として、 $X = a$ の確率を定義することができる。上のさいころの例で言えば、正しいさいころを使っている場合は、 $X = 1$ となるのは偶数なので $P(\{2, 4, 6\}) = \frac{3}{6}$ より、 $X = 1$ となる確率は $\frac{1}{2}$ であるが、もし、1 と 5 の目の出る確率がほかの目より 2 倍大きいとしたら、 $P(\{2, 4, 6\}) = \frac{3}{8}$ より、 $X = 1$ となる確率は $\frac{3}{8}$ となる。

定義 2.2 確率関数 (probability mass function) 離散確率変数 X が $a_1, a_2, \dots$ という値を取るとき、その個々の値を取る確率 $P(X = a_k), k = 1, 2, \dots$ を集合として考えたものを X の確率関数という。 a_k を $P(X = a_k)$ に対応させるという意味で「関数」である。確率規則とも言う

$$a_k \mapsto f_X(a_k) = P(X = a_k), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.8)$$

定義 2.3 累積分布関数 (cumulative distribution function) 確率変数 X のすべての取りうる値 x に対して、値 x とその値以下である確率 $P(X \leq x)$ の対応関係を記述した関数を X の累積分布関数という。

$$x \mapsto F_X(x) = P(X \leq x) \quad (2.9)$$

X が任意の区間 $[a, b]$ に含まれる確率は、次のように累積分布関数によって「計算」できる。

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a - 0)$$

定義 2.4 密度関数 (probability density function) 累積分布関数が微分可能なとき、その導関数を密度関数という。

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) \quad (2.10)$$

例 2.13 さいころ振り実験の確率モデルで、目 i の出る確率を p_i としたとき、 $\{p_i\}$ を確率分布 (確率関数) といった。この確率モデルで定義されるさいころを振ったときに出る目の数を X とすると、 X は確率変数で、その確率関数は確率空間の確率関数と同じになる。このような確率変数は自然な確率変数と言われる。

密度関数は確率ではないが、微少な幅を掛けると確率の近似値を与える。

$$P(a < X \leq a + h) = F_X(a + h) - F_X(a) \cong f_X(a)h$$

したがって、密度関数は相対的に値の取りやすさを表したものと言える。また、微積分の基本定理から

$$F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x) dx \quad (2.11)$$

が成り立つ。密度関数を持つ確率変数は連続であるという。

例 2.14 ルーレットのようなディスクで周上に (分度器のように) 0 から 1 までの目盛りが (連続的に) 刻まれているものを回して、止まった位置 (例えば真北) の目盛りの値によって決まる賞品 (石油) をもらえるものとしよう。賞金を決めるために、まずこのディスクの確率モデルを考える必要がある。回転が十分に滑らかならば、目盛り a と目盛り $b (> a)$ の間で停止するという事象の確率は周上の a から b までの弧の長さに比例すると考えて良い。したがって、その確率分布は一様分布を仮定できる。つまり、 $0 < a < b < 1$ としたとき、 $P([a, b]) = b - a$ とするのが合理的である。一方、ディスク周上の固定点 (原点) から、停止した点までの弧の長さを X とすると、 X は区間 $[0, 1]$ で一様分布するしてよい。この確率変数は今定義した確率空間によって自然に定義される確率変数である。

止まった位置の目盛りが u だったら、 $-\log u$ リットルもらえるとした場合の獲得容量 Y は確率変数である。10 リットル以上もらえる確率はいくつか、という問題は $-\log u \geq 10 \Leftrightarrow u \leq e^{-10}$ なので、 $X \leq e^{-10}$ の確率はいくつか、という問題と同じである。したがって、答えは $P(Y \geq 10) = e^{-10}$ 。

練習 2.4 どの目の出る確率も等しいさいころを 2 回振ったときに出る目の合計を X とする。このとき、 X の確率規則を知るために適切な標本空間を定義し、その標本空間の各標本点ごとに X の値を決めなさい。その結果を参考に、 X の確率関数を計算しなさい。

2.4 期待値

期待値 (expectation) あるいは平均は、取りうる値にその値を取る確率の重みを付けて平均したもの (「値 $\times$ 確率の和」, 「値 $\times$ 確率の積分」) として定義される。確率関数 $\{a_1, a_2, \dots\}$ を持

つ離散確率変数 X の期待値は

$$E(X) = \sum_k a_k f(a_k) \quad (2.12)$$

密度関数 $f(x)$ を持つ連続確率変数 X の期待値は

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (2.13)$$

と定義される。両者を併せて

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) \quad (2.14)$$

のように各場合がある。これは Laplace-Stieltjes (ラプラス・スチルチェス) 積分と呼ばれ、 X が離散の場合は 1 番目の定義式、連続の場合は 2 番目の定義式に等しいものと解釈する。

2.4.1 関数で変換された確率変数の期待値

確率変数 X と関数 $g(x)$ に対して $g(X)$ はやはり確率変数になる。 $g(X)$ の定義域は X の取り得る値すべて、値域は $\{b; g(a) = b, a \text{ は } X \text{ の取り得る値すべてで与えられる}\}$ 。その期待値は、以下で与えられるが、これは定義式ではない。正確な表現ではないが、「値 $\times$ 確率の和」の形をしている。

$$E(g(X)) = \sum_k g(a_k) f(a_k) \quad \text{あるいは} \quad (2.15)$$

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

特に

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y) \quad (2.16)$$

2.4.2 ばらつきの指標

ランダム変動の量的評価の指標がいくつかある。

定義 2.5 平均絶対偏差 偏差の絶対値の期待値を平均絶対偏差という。

$$E(|X - E(X)|) = \int_{-\infty}^{\infty} |x - E(X)| f(x) dx \quad (2.17)$$

ばらつきの最も自然な定義である。

定義 2.6 分散 (variance) 偏差の 2 乗の期待値を分散という。

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2 \quad (2.18)$$

平均絶対偏差の計算で、絶対値を取るという計算が数学的に「美しい」ので、考えられた便法。

定義 2.7 標準偏差 (standard deviation) 分散の正の平方根。

$$S(X) = \sqrt{V(X)} \quad (2.19)$$

X の次元に合わせたばらつきの指標。

定義 2.8 変動係数 (coefficient of variation) 非負の確率変数に対するばらつきの指標。標準偏差を平均値で割ったものを変動係数という。

$$CV(X) = \frac{S(X)}{E(X)} \quad (2.20)$$

基準化したばらつきの尺度。

特に次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} V(aX + b) &= a^2 V(X) \\ S(aX + b) &= aS(X) \\ CV(aX) &= CV(X) \end{aligned} \quad (2.21)$$

変動係数は単位の変換に関して不変。

確率変数 X からその期待値 $E(X)$ を引くとその期待値は 0、分散は $V(X)$ 、従って、 $X - E(X)$ を X の標準偏差で割ったものの平均は 0、分散は 1 になる。確率変数に対するこのような変換は確率変数の標準化 (規準化) とも呼ばれる (例、標準正規分布)。

$$E\left(\frac{X - E(X)}{S(X)}\right) = 0, V\left(\frac{X - E(X)}{S(X)}\right) = 1 \quad (2.22)$$

例 2.15 (定義関数) 事象 A が起きれば 1、さもなければ 0 という値を取る確率変数を 1_A と書いて、事象 A の定義関数と言う。

$$P(1_A = 1) = P(A), P(1_A = 0) = 1 - P(A) \quad (2.23)$$

ベルヌイ分布の代表的なもの。

$$E(1_A) = P(1_A = 1) = P(A)$$

練習 2.5 $P(A) = p$ という事象 A の定義関数を 1_A としたとき、 1_A の平均と分散を計算しなさい。また、平均絶対偏差と標準偏差を計算し、大小を比較しなさい。

練習 2.6 密度関数が次で与えられる連続確率変数 X の平均と標準偏差、変動係数を計算しなさい。

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-ax}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

2.4.3 モーメント

定義 2.9 X^n の期待値を n 次モーメント (moment) という

$$\begin{aligned} E(X^n) &= \sum_k a_k^n f(a_k) \quad \text{あるいは} \\ E(X^n) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx \end{aligned} \quad (2.24)$$

特に、1 次のモーメントが期待値。また、 $(X - E(X))^n$ の期待値は平均周りの n 次モーメントと呼ばれる。平均周りの 2 次のモーメントが分散。モーメントは確率分布を特徴付けている。

たとえば、平均に対して非対称に分布しているかどうかを調べるには、平均周りの 3 次モーメント

$$E\left((X - E(X))^3\right) = E\left(X^3 - 3E(X)X^2 + 3(E(X))^2X - (E(X))^3\right)$$

を調べればよい。基準化された確率変数の 3 次モーメントは歪度（わいど）、同じく 4 次モーメントは尖度（せんど）と呼ばれる。

練習 2.7 密度関数が次で与えられる連続確率変数 X の n 次モーメントを計算しなさい。また平均周りの 2 次と 3 次のモーメントを計算しなさい。

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

2.5 期待値の応用

2.5.1 母関数 (generating function)

数列 $\{a_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ を係数とする次数無限の多項式

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad (2.25)$$

を $\{a_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ の母関数という。母関数を連続的に微分することによって数列を生成 generate できる：

$$a_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k}{dz^k} G(z) \right|_{z=0} = \frac{1}{k!} G^{(k)}(0) \quad (2.26)$$

例 2.16 数列 $\{1, 1, 1, \dots\}$ の母関数は

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \frac{1}{1-z}$$

ただし、 $|z| < 1$ 。

$$G^{(k)}(z) = \frac{k!}{1-z^{k+1}}$$

なので、確かに $a_k = 1$ が生成できる。

例 2.17 数列 $\{1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \frac{1}{5!}, \dots\}$ の母関数は

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k = e^z$$

したがって、 $G^{(k)}(z) = e^z$ なので、確かに $a_k = \frac{1}{k!}$ が生成できる。

2.5.2 確率母関数 (probability generating function)

非負の整数値を取る確率変数 X の確率関数を $\{f(k), k = 0, 1, 2, \dots\}$ としたとき、 $\{f(k), k = 0, 1, 2, \dots\}$ の母関数を X の確率母関数という。 X が $\circ \circ$ 分布に従っているとき、 $\circ \circ$ 分布の確率母関数とも言う。 $f(k)z^k$ の和ということは、 z^X の期待値に他ならない、したがって、

$$G_X(z) = E(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^k \quad (2.27)$$

である。

母関数が数列を生成したように、確率母関数を連続的に微分することによって確率を生成できる：

$$f(k) = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} G_X(z) \Big|_{z=0} \quad (2.28)$$

また、連続的に微分して $z = 1$ と置くとモーメント（の定数倍）を計算することが出来る。実際

$$\frac{d^n}{dz^n} G_X(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-n+1) f(k) z^{k-n}$$

となるので、

$$\frac{d^n}{dz^n} G_X(z) \Big|_{z=1} = E(X(X-1) \cdots (X-n+1)) \quad (2.29)$$

である。これは n 次の階乗モーメントと呼ばれる。たとえば、

$$G_X'''(1) = E(X(X-1)(X-2)) = E(X^3) - 3E(X^2) + 2E(X)$$

のようにして、 n 次までの階乗モーメントが分かれば通常の n 次モーメントまでが分かり、逆も真である。

練習 2.8 n は 1 以上の整数、 p は $0 < p < 1$ の定数としたとき、パラメータ n, p の 2 項分布の確率母関数を計算しなさい。それを微分することにより、平均や確率関数が求められることを確かめなさい。

$$f(k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, & k = 0, 1, \dots, n \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

練習 2.9 $a > 0$ に対して、確率関数が次の式で与えられる確率分布はポワソン分布と呼ばれます。パラメータ 1 のポワソン分布の確率母関数を求め、その平均と分散を計算しなさい。

$$f(k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

2.5.3 モーメント母関数 (moment generating function)

$e^{\theta X}$ の期待値を X のモーメント母関数という。

$$M_X(\theta) = E(e^{\theta X}) \quad (2.30)$$

X が $\circ \circ$ 分布に従っているとき、 $\circ \circ$ 分布のモーメント母関数とも言う。

これは次のように解釈できる。 X の k 次モーメントを m_k としたとき、 $\{m_k/k!, k = 0, 1, 2, \dots\}$ の母関数は次のように計算できる。

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k}{k!} \theta^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E(X^k)}{k!} \theta^k = E \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} \theta^k \right) = E(e^{\theta X})$$

数列の母関数と数列の関係をモーメント母関数に当てはめると、モーメント母関数を n 回微分して $\theta = 0$ を代入したものが n 次モーメントになっている。

$$E(X^n) = \frac{d^n}{d\theta^n} M(\theta) \Big|_{\theta=0} \quad (2.31)$$

証明はしないが、次の性質があるために、モーメント母関数は重要な役割を果たす。

命題 2.1 確率変数 X, Y のすべての次数のモーメントが同じならば、分布として等しい。したがって、二つの確率変数のモーメント母関数が一致するならば、両者は同じ確率分布を持つ。

練習 2.10 X のモーメント母関数を $M_X(\theta)$ としたとき、 $aX + b$ のモーメント母関数は $e^{b\theta} M_X(a\theta)$ で与えられることを証明しなさい。

2.6 いくつかの確率規則、離散分布

確率変数 X は $\circ \circ$ 分布に従う、ということを、「 $\circ \circ$ 確率変数 X 」とすることがある。例えば、ポワソン確率変数、正規確率変数、など。確率変数を明示的に示さずに、単に $\circ \circ$ 分布と言ったり、あるいは $\circ \circ$ 分布の期待値と言うこともある。例えば、パラメータ n, p の 2 項分布の期待値は np 。

2.6.1 ベルヌイ試行 (Bernoulli trial)

繰り返し同じ条件でランダム試行を繰り返し、ある特定の事象が起きるかどうかにだけに関心を持って観察する場合、その独立試行を繰り返すことをベルヌイ試行という。注目した特定の事象が起きることを成功といい、その事象の起きる確率を p としたとき、パラメータ p のベルヌイ試行という。また、試行の回数を n としたときは、長さ n のベルヌイ試行ということもある。たとえば、コイン投げで表が出ることを「成功」と考えた場合など。基本的な離散分布はこのベルヌイ試行から派生している。ベルヌイは確率を研究した学者の名前である。

2.6.2 ベルヌイ分布 (Bernoulli distribution)

パラメータ p のベルヌイ試行を 1 回行ったとき成功する回数が従う確率分布をパラメータ p のベルヌイ分布という。ベルヌイ分布に従う確率変数を X とすると、 X は 0 か 1 の二つの値だけを取り、その確率関数は次のように与えられる

$$P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p \quad (2.32)$$

平均は p 、分散は $p(1 - p)$ 、確率母関数は $1 - p + pz$

2.6.3 2 項分布 (binomial distribution)

パラメータ p のベルヌイ試行を n 回繰り返したときに成功する回数が従う確率分布をパラメータ n, p の 2 項分布という。ベルヌイ分布に従う確率変数を X とすると、 X は 0 から n までの整数値を取り、その確率関数は次のように与えられる。

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2.33)$$

コイン投げを n 回繰り返したとき、表の出る回数はパラメータ $n, p = 0.5$ の 2 項分布に従う。平均は np 、分散は $np(1 - p)$ 、確率母関数は $(1 - p + pz)^n$ 。

2.6.4 幾何分布 (geometric distribution)

表の出る確率が p のコインを投げ続け、初めて表が出るまでに投げる回数を X としたとき、 X の従う確率規則を幾何分布という。 X の確率関数が次のように与えられているとき、 X はパ

ラメータ p の幾何分布に従うという。

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.34)$$

成功する確率が p のベルヌイ試行で初めて成功するまでの試行回数を X とすると、 X はパラメータ p の幾何分布に従う。平均は p^{-1} 、分散は $p^{-2}(1 - p)$ 、確率母関数は $pz/(1 - (1 - p)z)$ 。

練習 2.11 パラメータ p の幾何分布の確率母関数が $pz/(1 - (1 - p)z)$ で与えられることを確かめ、それを微分することにより、平均と分散を計算しなさい。

2.6.5 ポワソン分布 (Poisson distribution)

パラメータ n, p の 2 項分布で、 $np = \lambda$ を一定としたまま n を無限に大きくした場合の極限の分布をポワソン分布という。 X の確率関数が次のように与えられているとき、 X はパラメータ λ のポワソン分布に従うという。

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.35)$$

成功する確率がほとんど 0 のベルヌイ試行を高速に繰り返したとき、成功する回数の従う確率規則といってもよい。実際、パラメータ n, p の 2 項分布について、 $np = \lambda, n \gg 1$ とすると、

$$P(X = k) = \frac{n!}{k!(n - k)!}p^k(1 - p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

が導かれる。航空機事故やホームページのアクセス回数など、可能なチャンスはたくさんあっても滅多に起きない、という事象（稀現象）の起き方を説明するモデルとして使われる。平均も分散も λ 。

練習 2.12 パラメータ λ のポワソン分布に従う確率変数 X の確率母関数を計算し、平均も分散も λ であることを確かめなさい。

2.6.6 離散一様分布 (uniform distribution)

取りうる値すべてについて、その値を取る確率が同じとなる確率分布を離散一様分布という。たとえば、取りうる値が 1 から n までの整数ならば次のように与えられる。

$$P(X = k) = \frac{1}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.36)$$

X は $\{1, 2, \dots, n\}$ 上の一様分布に従う、という。

練習 2.13 X が $\{1, 2, \dots, 6\}$ 上の一様分布に従うとき、その平均と分散を計算しなさい。

2.6.7 多項分布 (multinomial distribution)

m 種類の結果が起こるランダム試行を n 回繰り返して、 k 番目の結果の起きる回数を X_k としたとき、 $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ の従う確率分布を多項分布という。 $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ の結合確率関数が次のように与えられているとき、 $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ はパラメータ $n, p_1, \dots, p_m$ の多項分布に従うという。

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \dots, X_m = n_m) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_m^{n_m} \quad (2.37)$$

ただし $n_1, n_2, \dots, n_m$ は $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$ を満たす非負整数

$m = 2$ の場合が 2 項分布、その一般化。 X_k の平均は np_k 、分散は $np_k(1 - p_k)$ 。 X_j, X_k の共分散は $-np_j p_k$ 。

2.7 いくつかの確率規則、連続分布

2.7.1 正規分布 (normal distribution)

連続量の測定値の誤差の従う確率規則から導かれた確率分布で、 X の密度関数が次のように与えられているとき、 X はパラメータ μ, σ の正規分布に従うという。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < \infty \quad (2.38)$$

平均は μ 、分散は σ^2 。

X がパラメータ μ, σ の正規分布に従っているとき、それを標準化したもの： $(X - \mu)/\sigma$ は標準正規分布に従うという。その分布関数は $\Phi(z)$ と書かれることが多い。

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \quad (2.39)$$

これは初等関数の範囲で原始関数を持たないので、数表の形で与えられることが多い。これが統計の教科書の巻末に良く掲載されている正規分布表。正規分布表が無い場合でも、Excel で「=NORM.S.DIST(z,true)」と入力すれば近似値（と言ってもほとんど正確）が得られる。

例 2.18 パラメータ μ, σ^2 の正規分布の平均、分散がそれぞれ μ, σ^2 であることを、モーメント母関数を利用して（その方が楽です）確かめなさい。

こたえ X をパラメータ μ, σ^2 の正規分布にしたがう確率変数とすると、 $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ は標準正規分布に従う確率変数となる。まず Z のモーメント母関数を計算する。定義にしたがって

$$M_Z(\theta) = E(e^{\theta Z}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\theta)^2/2} dx = e^{\theta^2/2}$$

最後の等式は、（パラメータ $\theta, 1$ の）正規分布の密度関数の積分が 1 になることを使った。したがって、 $X = \sigma Z + \mu$ の関係を使って

$$M_X(\theta) = E(e^{\theta(\sigma Z + \mu)}) = E(e^{(\theta\sigma)Z}) e^{\theta\mu} = e^{\theta\mu} M_Z(\theta\sigma) = \exp\left(\mu\theta + \frac{\sigma^2}{2}\theta^2\right)$$

練習 2.14 (1)Excel あるいは R を使ってパラメータ $\mu = 0, \sigma = 1$ の正規分布の密度関数、累積分布関数のグラフを描きなさい（Excel は「NORM.S.DIST」、R は「dnorm, pnorm」）。(2) また、パラメータ $\mu = 4, \sigma = 4$ の正規分布のグラフを描きなさい。何が分かりますか。

ヒント Excel でグラフを描く場合はなるべく大きな関数表を作成して散布図を描く必要があるが、R ならば「curve(dnorm(x), -3, 3)」だけで描ける。

2.7.2 指数分布 (exponential distribution)

正定数 $\lambda > 0$ に対して、密度関数が次の式で与えられる確率分布は、パラメータ λ の指数分布と呼ばれる

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0 \quad (2.40)$$

確率過程でもっとも良く使われる分布で、いわばコメのようなもの。平均は λ^{-1} 、分散は λ^{-2} 。

指数分布は幾何分布を連続化することによって得られる。具体的には、パラメータ p のベルヌイ試行で間隔 Δt で繰り返し、成功するまでの時間を $T(\Delta t)$ としたとき、 $p/\Delta t$ の値を一定に保ったまま $\Delta t \rightarrow 0$ としたときに指数分布が得られる。実際、

$$P(T(\Delta t) > t) = (1 - p)^{t/\Delta t} = (1 - \lambda \Delta t)^{t/\Delta t} \rightarrow e^{-\lambda t}$$

数学的には、無記憶性を持った確率変数の密度関数として特徴付けられている。確率変数 X が無記憶性を持つとは、次の式が成り立つことである。

$$P(X > t + s \mid X > s) = P(X > t), \quad \forall t, s > 0 \quad (2.41)$$

練習 2.15 パラメータ λ の指数分布のモーメント母関数を計算し、その平均、分散がそれぞれ λ^{-1} , λ^{-2} であることを確かめなさい。

練習 2.16 (1) Excel あるいは R を使ってパラメータ $\lambda = 1$ の指数分布のグラフを $[0, 3]$ の範囲で描きなさい (Excel は「EXPON.DIST」、R は「dexp」)。(2) また、同じグラフを $[5, 8]$ の範囲で描きなさい。何が分かりますか。

2.7.3 ガンマ分布 (gamma distribution)

正定数 $a, b > 0$ に対して、密度関数が次の式で与えられる確率分布は、パラメータ a, b のガンマ分布と呼ばれる。

$$f(x) = \frac{a^b}{\Gamma(b)} x^{b-1} e^{-ax}, \quad x > 0 \quad (2.42)$$

ただし、 $\Gamma(t)$ はガンマ関数

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx \quad (2.43)$$

である。ガンマ関数は、特に t が正整数の場合は $\Gamma(t) = (t-1)!$ となり、階乗を一般化したものである。

特に $b = 1$ の場合は指数分布、 $b > 1$ の場合は密度関数が釣り鐘型、 $0 < b < 1$ の場合は $x \rightarrow 0$ のとき、 y 軸に漸近する逆 J 型となる。平均は b/a 、分散は b/a^2 。

特に b が正整数の場合、フェーズ b のアラン分布と呼ばれる。 $b = m$ と置き、ガンマ関数を階乗で書き直すと

$$f(x) = \frac{a^m}{(m-1)!} x^{m-1} e^{-ax}, \quad x > 0$$

例 2.19 パラメータ a, b のガンマ分布のモーメント母関数を計算し、その平均、分散がそれぞれ $b/a, b/a^2$ であることを確かめなさい。

こたえ X をパラメータ a, b のガンマ分布に従う確率変数とすると、そのモーメント母関数は

$$\begin{aligned} M_X(\theta) &= \int_0^\infty e^{\theta x} \frac{a^b}{\Gamma(b)} x^{b-1} e^{-ax} dx = \left(\frac{a}{a-\theta} \right)^b \int_0^\infty \frac{(a-\theta)^b}{\Gamma(b)} x^{b-1} e^{-(a-\theta)x} dx \\ &= \left(\frac{a}{a-\theta} \right)^b \end{aligned}$$

最後の等式は、(パラメータ $a-\theta, b$ のガンマ分布の) 密度関数の積分が 1 であることを使った。
これより

$$\frac{d}{d\theta} M_X(\theta) = \frac{b}{a} \left(\frac{a}{a-\theta} \right)^{b+1}, \quad \frac{d^2}{d\theta^2} M_X(\theta) = \frac{b(b+1)}{a^2} \left(\frac{a}{a-\theta} \right)^{b+2}$$

なので、

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{d}{d\theta} M_X(0) = \frac{b}{a} \\ V(X) &= \frac{d^2}{d\theta^2} M_X(0) - (E(X))^2 = \frac{b}{a^2} \end{aligned}$$

練習 2.17 Excel あるいは R を使って $(a, b) = (1, 0.5), (1, 1), (1, 2), (1, 5), (1, 10), (2, 5)$ のガンマ分布の密度関数を描きなさい (Excel は「`GAMMA.DIST`」、R は「`dgamma`」)。

2.7.4 連続一様分布

密度関数が次の式で与えられる確率分布は、区間 $[a, b]$ 上の連続一様分布と呼ばれる。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.44)$$

しきりのないルーレットを廻したときに玉の落ち着く位置 (ある定点から測った円弧の長さ) のようにどの値も同じような確率で取る分布。平均は $(a+b)/2$ 、分散は $(b-a)^2/12$

練習 2.18 区間 $[0, 1]$ 上で連続一様分布する確率変数 X の平均、分散を求めなさい。区間 $[a, b]$ 上で連続一様分布する確率変数を Y としたとき、 X と Y の関係式を求め、それを使って Y の平均、分散を計算しなさい。

2.7.5 ベータ分布

密度関数が次の式で与えられる確率分布は、パラメータ p, q のベータ分布と呼ばれる。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.45)$$

ただし、 $p, q > 0$ 。 $p = q = 1$ は区間 $(0, 1)$ での一様分布。 $p, q < 1$ ならば U 型、 $p, q > 2$ ならば釣リ鐘型。

練習 2.19 Excel あるいは R を使って $(p, q) = (0.3, 0.4), (1, 1), (1, 3), (2, 4), (5, 10)$ のベータ分布の密度関数を描きなさい (Excel は「`BETA.DIST`」、R は「`dbeta`」)。

2.7.6 対数正規分布 (log-normal distribution)

平均 μ 、分散 σ^2 の正規確率変数 X に対して、 $Y = e^X$ の従う分布を対数正規分布という

$$P(Y \leq y) = P(X \leq \log y) = \int_{-\infty}^{\log y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y} \exp\left(-\frac{(\log y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad y > 0 \quad (2.46)$$

あるいは、対数変換したものが正規分布に従うような確率変数の分布、と言っても良い。平均は $e^{\mu+\sigma^2/2}$ 、分散は $e^{2\mu+2\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$ 。

練習 2.20 $\log Y$ がパラメータ μ, σ^2 の正規分布に従うことを使って、 Y の累積分布関数、密度関数が上のように与えられることを確かめなさい。

練習 2.21 パラメータ μ, σ^2 の対数正規分布の平均、分散がそれぞれ

$$e^{\mu+\sigma^2/2}, e^{2\mu+2\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$$

であることを確かめなさい。

練習 2.22 Excel あるいは R を使ってパラメータ $(\mu, \sigma) = (0, 1)$ の対数正規分布の平均、分散を計算し、密度関数のグラフを描きなさい。また $(\mu, \sigma) = (1, 1), (0, 2)$ の場合の密度関数のグラフを描きなさい (Excel は「LOGNORM.DIST」、R は「dlnorm」)。

2.8 条件付き確率

天気によって利用客数が違うというように、ある事象 A の起こり方が別の事象 H の起こり方に依存するような場合、事象 H が起きるという条件の下で事象 A の起きる確率は条件を付けない場合の確率と異なると考えられる。事象 H が起きるという条件の下で事象 A が起きる確率を条件付き確率と言い、 $P(A | H)$ あるいは $P_H(A)$ と表す

$$P(A | H) = P_H(A) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)} \quad (2.47)$$

部分集合 H を標本空間と考えて、その中で確率空間を構成したと考えればよい。分母を払った次の式は積の公式とも呼ばれ、頻繁に使われる

$$P(A \cap H) = P(A | H)P(H) \quad (2.48)$$

$P(\cdot)$ を使って表すことができる公式は、すべての P を P_H 、あるいは $P(\cdot | H)$ に置き換えても成り立つ。実際、たとえば

$$P_H(A \cap A^c) = 0 \quad \text{あるいは} \quad P(A \cap A^c | H) = 0$$

$$P_H(A) = P_H(A \cap B) + P_H(A \cap B^c)$$

$$P_H(A \cup B) = P_H(A) + P_H(B) - P_H(A \cap B)$$

証明は条件付き確率の定義式に従って展開すればよい。たとえば、最後の等式は任意の事象 A, B に対して

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

が成り立っているので、 A の代わりに $A \cap H$ 、 B の代わりに $B \cap H$ を代入しても成り立つ。

$$\begin{aligned} P((A \cap H) \cup (B \cap H)) &= P((A \cup B) \cap H) \\ &= P(A \cap H) + P(B \cap H) - P(A \cap B \cap H) \end{aligned}$$

この両辺を $P(H)$ で割れば良い。

練習 2.23 これらの式が成り立つことを証明しなさい。

2.8.1 全確率の公式

$B_1, B_2, \dots, B_n$ が互いに排反で、 $\cup_{k=1}^n B_k$ が全事象ならば、任意の事象 A に対して次の式が成り立つ。

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^n P(A | B_k)P(B_k) \quad (2.49)$$

この等式を全確率の公式という。

2.8.2 独立事象

事象 A は事象 B の起き方と関係なく起きるならば、事象 B が起きるという条件を付けても付けなくても事象 A の起きる確率は同じ、

$$P(A | B) = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (2.50)$$

このとき、二つの事象 A, B は互いに独立であるという。

三つの事象 A, B, C が互いに独立であるとは、次の式がすべて成り立つことと定義される

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\ P(A \cap C) &= P(A)P(C) \\ P(B \cap C) &= P(B)P(C) \\ P(A \cap B \cap C) &= P(A)P(B)P(C) \end{aligned}$$

一般に n 個の事象 $A_1, A_2, \dots, A_n$ の独立性は、あらゆる $n-1$ 個の組み合わせの事象が互いに独立で、さらに

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_n)$$

が成り立つこと、と定義される。あるいは、 $\forall m; \forall i_1, i_2, \dots, i_m$ に対して

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_m})$$

が成り立つこと、と言っても良い

$X \backslash Y$	0	1	2	周辺確率関数
0	$(1-p)^3$	$p(1-p)^2$	0	$(1-p)^2$
1	$p(1-p)^2$	$p(1-p)$	$p^2(1-p)$	$2p(1-p)$
2	0	$p^2(1-p)$	p^3	p^2

2.8.3 結合分布、あるいは同時分布 (joint distribution)

血液検査で血糖値がいくつで尿酸値がいくつというように、試行（この場合は血液検査）の結果がスカラー量ではなく、ベクトルの場合、ベクトルとしての確率規則を定める必要がある。スカラー量の場合と同様に、離散確率変数と連続確率変数とで扱いを分ける必要がある。

- 結合確率関数

$$f_{X,Y}(a_j, b_k) = P(X = a_j, Y = b_k) \quad (2.51)$$

右辺は $X = a_j$ という事象と $Y = b_k$ という事象が同時に起きる積事象を表すが、このように「 $\cap$ 」の代わりに「 $,$ 」で代用することが多い。

- 結合累積分布関数

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \quad (2.52)$$

- 結合密度関数

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x, y) \quad (2.53)$$

$$f_{X,Y}(x, y) dx dy = P(x < X \leq x + dx, y < Y \leq y + dy)$$

- 周辺確率関数

$$\sum_k f_{X,Y}(a_j, b_k) = P(X = a_j) \quad (2.54)$$

$$\sum_j f_{X,Y}(a_j, b_k) = P(Y = b_k)$$

- 周辺累積分布関数

$$F_{X,Y}(x, \infty) = \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy \right) dx = P(X \leq x) \quad (2.55)$$

- 周辺密度関数

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy = f_X(x) \quad (2.56)$$

例 2.20 表が出る確率が p のコインを 3 回投げるという試行で、最初の 2 回に出る表の回数を X 、後の 2 回に出る表の回数を Y としたとき、次の問に答えなさい。(1) X, Y の結合確率関数を求めなさい。(2) X の周辺確率関数を求めなさい。(3) Y の周辺累積分布関数を求めなさい。

こたえ (1)(2) 結合確率関数周辺確率関数は次の表で与えられる。

(3) Y の周辺累積分布関数は 0, 1, 2 でジャンプする階段関数：

$$P(Y < 0) = 0, P(Y < 1) = (1-p)^2, P(Y < 2) = 2p(1-p), P(Y \geq 2) = 1$$

2.8.4 条件付き分布

二つの離散確率変数 X, Y に対して、 $Y = b_k$ という事象が起きるという条件の下で $X = a_i$ という事象が起きる確率を問題にすることがある。これは、条件付き確率の定義に従い、次のように計算される。

$$P(X = a_i | Y = b_k) = \frac{P(X = a_i, Y = b_k)}{P(Y = b_k)}$$

これを条件付き確率関数と言い

$$f_{X|Y}(a_i | b_k) = P(X = a_i | Y = b_k) \quad (2.57)$$

のように表す。条件付き累積分布関数も条件付き確率の定義を利用して同様に定義できる。

連続の場合の条件付き密度関数は、結合密度関数と周辺密度関数を使って次のように定義する。

$$f_{X|Y}(a | b) = \frac{f_{X,Y}(a, b)}{f_Y(b)} \quad (2.58)$$

2.8.5 独立な確率変数

二つの確率変数 X, Y の結合累積分布関数を $F_{X,Y}(x, y)$ 、 X, Y の周辺累積分布関数をそれぞれ $F_X(x), F_Y(y)$ としたとき、すべての x, y に対して次の式が成り立つとき、二つの確率変数 X, Y は互いに独立であるという。

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \times F_Y(y) \quad (2.59)$$

これは二つの事象 $\{X \leq x\}, \{Y \leq y\}$ が互いに独立ということと同じ。

離散確率変数の場合は、結合確率関数が周辺確率関数の積になると言っても良い。連続確率変数の場合は結合密度関数が周辺密度関数の積になると言っても良い。

一般に、 n 個の確率変数 $X_1, X_2, \dots, X_n$ が互いに独立であることも、上の式を拡張した形で定義される。すなわち、次の式が成り立つとき、 $X_1, X_2, \dots, X_n$ は互いに独立であるという。

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \times F_{X_2}(x_2) \times \dots \times F_{X_n}(x_n) \quad (2.60)$$

n 個の事象が互いに独立であることを言うためにはすべての部分集合の事象が互いに独立であることを示す必要があったが、確率変数の独立性のためには、上の式が成り立てば十分である。なぜならば、この式の周辺分布を計算することで、 $n - 1$ 個以下の確率変数が独立であるための式が得られるからである。

特に、 n 個の確率変数 $X_1, X_2, \dots, X_n$ が互いに独立で同分布に従う場合は i.i.d. (independent, identically distributed) と呼ばれ、良く使われる。

2.8.6 合成積

X, Y が互いに独立ならば、 $X + Y$ の分布は X, Y の確率関数、あるいは密度関数を用いて以下のように計算できる

$$f_{X+Y}(n) = \sum_k f_X(k) f_Y(n - k), \quad (2.61)$$

あるいは

$$f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)f_Y(x-u)du = (f_X * f_Y)(x), \quad (2.62)$$

これは合成積 (convolution) と呼ばれる確率計算法である。 $X_1, X_2, \dots, X_n$ が i.i.d. の場合は、 $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ の分布は $f^{(*n)}(x)$ と表される。

非負整数値を取る確率変数ならば、確率母関数の積を考えることによって、同じような公式が導かれる。実際、

$$E(z^{X+Y}) = \left(\sum_i f_{X+Y}(i)z^i \right) = E(z^X)E(z^Y) = \left(\sum_i f_X(i)z^i \right) \left(\sum_k f_Y(k)z^k \right)$$

なので、両辺の z^n の係数が等しくならなければならないことから、

$$f_{X+Y}(n) = \sum_{i+k=n} f_X(i)f_Y(k) = \sum_{i=0}^n f_X(i)f_Y(n-i)$$

2.8.7 多変数関数によって定まる確率変数の期待値

2変数以上の関数を使って定義される確率変数の期待値は、結合分布を使って期待値の定義通り計算できる。離散型の場合は結合確率関数を使って

$$E(g(X, Y)) = \sum_{j,k} g(a_j, b_k) f_{X,Y}(a_j, b_k) \quad (2.63)$$

連続型の場合は結合密度関数を使って

$$E(g(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy \quad (2.64)$$

のように定義される。

特に、和の期待値は期待値の和：

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad (2.65)$$

もし、 X, Y が互いに独立ならば、積の期待値は期待値の積：

$$E(XY) = E(X)E(Y) \quad (2.66)$$

特に、 $X_1, X_2, \dots, X_n$ が i.i.d. ならば、 $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ のモーメント母関数は X のモーメント母関数の n 乗になる

$$M_{S_n}(\theta) = E(e^{\theta(X_1+X_2+\dots+X_n)}) = \prod_{k=1}^n M_{X_k}(\theta) = (M_X(\theta))^n \quad (2.67)$$

例 2.21 $X_1, X_2, \dots, X_n$ が独立にパラメータ p のベルヌイ分布に従うとき、 $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ のモーメント母関数は

$$M_{S_n}(\theta) = E(e^{\theta S_n}) = \prod_{k=1}^n E(e^{\theta X_k}) = (pe^{\theta} + 1 - p)^n$$

一方、 Z がパラメータ n, p の 2 項分布に従うとき、そのモーメント母関数は次のように計算される

$$M_Z(\theta) = \sum_{k=0}^n e^{\theta k} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (pe^{\theta} + 1 - p)^n$$

両者は完全に一致するので、 S_n はパラメータ n, p の 2 項分布に従うことが分かる。

練習 2.24 確率変数の和の期待値は各変数の期待値の和に等しいことを証明しなさい。

練習 2.25 $X_1, X_2, \dots$ は次の確率関数を持つ互いに独立な確率変数とする。

$$f(x) = p^x (1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1$$

このとき、 $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ の分布を合成積を使って計算しなさい（数学的帰納法）。また、モーメント母関数を使って計算しなさい。

2.8.8 二つの確率変数の関連度合いの尺度

独立ではない二つの確率変数の間の「ある種の」従属度合いを数量化したものに共分散、相関係数などがある。

定義 2.10 共分散 (covariance) 二つの確率変数の偏差の積の期待値を共分散という。関連度合いの指標の一つ

$$C(X, Y) = E(X - E(X))(Y - E(Y)) = E(XY) - E(X)E(Y) \quad (2.68)$$

定義 2.11 相関係数 (correlation coefficient) 二つの基準化された確率変数の共分散を相関係数という。

$$R(X, Y) = E\left(\frac{X - E(X)}{S(X)} \frac{Y - E(Y)}{S(Y)}\right) = \frac{C(X, Y)}{S(X)S(Y)} \quad (2.69)$$

相関係数の最大値は 1、最小値は -1 である。

二つの確率変数が互いに独立ならば相関係数は 0 になるが、相関係数が 0 になるからといって独立にはならない。相関係数は線形関係の従属性をチェックしているだけ。相関係数が 0 になる二つの確率変数の間は互いに無相関という。

次のような関係がある

$$\begin{aligned} C(X, X) &= V(X) \\ C(X, Y) &= C(Y, X) \\ C(X, aY + b) &= aC(X, Y) \\ V\left(\sum_i X_i\right) &= \sum_i V(X_i) + 2\sum_{i>j} C(X_i, X_j) \end{aligned}$$

練習 2.26 相関係数が 1 になるのは二つの確率変数がどのような関係にある場合か。 -1 の場合どうか。

ヒント 任意の z に対して、 $V(zX + Y) \geq 0$ 。

2.8.9 条件付き期待値とその応用

$Y = y$ という条件の下での X の期待値は、条件付き密度関数を使って以下の式で定義される。

$$E(X | Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x | y) dx$$

これは y の関数になっている。 $Y = y$ のとき $g(y) = E(X | Y = y)$ という値を取る確率変数 $g(Y)$ を $E(X | Y)$ と記す。

$g(Y)(= E(X | Y))$ の期待値は、定義通り

$$\begin{aligned} E(E(X | Y)) &= \int_{-\infty}^{\infty} E(X | Y = y) f_Y(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x | y) dx \right) f_Y(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x (f_{X|Y}(x | y) f_Y(y)) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} x dx \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = E(X) \end{aligned}$$

すなわち

$$E(X) = E(E(X | Y)) \quad (2.70)$$

離散の場合についても同じ式が成り立つ。

特に、事象 A の定義関数 1_A を X に代入すると、 $E(1_A | Y = y) = P(A | Y = y)$ となり、

$$P(A) = E(P(A | Y)) \quad (2.71)$$

が成り立つ。

さらに、分散に付いても、条件付き期待値、条件付き分散を用いて

$$V(X) = E(V(X | Y)) + V(E(X | Y)) \quad (2.72)$$

が成り立つ。

練習 2.27 確率変数の分散を条件付き期待値を利用して計算する上の式が成り立つことを証明しなさい。

ヒント $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ として、条件付き期待値の式 (2.70) を繰り返し使う。

2.8.10 多変量正規分布

X, Y の結合密度関数が次の式で与えられるとき、 X, Y はパラメータ $\mu_X, \sigma_X^2, \mu_Y, \sigma_Y^2, \rho$ の 2 変量正規分布に従うという。

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\eta(x, y)\right), \quad -\infty < x, y < \infty \quad (2.73) \\ \eta(x, y) &= \left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 \end{aligned}$$

モーメント、共分散、相関係数は次のようになる。

$$\begin{aligned} E(X) &= \mu_X, V(X) = \sigma_X^2 \\ E(Y) &= \mu_Y, V(Y) = \sigma_Y^2 \\ C(X, Y) &= \rho\sigma_X\sigma_Y, R(X, Y) = \rho \end{aligned}$$

X, Y の相関行列とその逆行列は

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

のように表されるので、 $\mathbf{x} = \left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}, \frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y} \right)^t$ とすると、指数関数の中身は

$$\frac{1}{2(1-\rho^2)} \eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^t \Sigma^{-1} \mathbf{x}$$

となる。

$X_1, X_2, \dots, X_n$ が多変量正規分布に従うとは、それらの任意の線形結合が (1 次元) 正規分布に従うことである。すなわち、任意の実数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ に対して、 $\sum_{k=1}^n a_k X_k$ が正規分布に従う。したがって、 X_k そのものも正規分布に従う。

$X_1, X_2, \dots, X_n$ が多変量正規分布に従うならば、任意の一次変換も多変量正規分布に従う。例えば、 X, Y が独立に正規分布に従うならば、 $X, X+Y$ は 2 変量正規分布に従う。

練習 2.28 X, Y が上のような 2 変量正規分布に従うとき、(1) X の周辺分布は平均 μ_X 、分散 σ_X^2 の正規分布になることを確かめなさい。(2) X, Y の相関係数が ρ になることを確かめなさい。(3) $Y = y$ という条件の下で、 X は平均 $\mu_X + \rho\sigma_X(y - \mu_Y)/\sigma_Y$ 、分散 $\sigma_X^2(1 - \rho^2)$ の正規分布になることを示しなさい。

練習 2.29 上の練習問題の結果を利用して、Excel あるいは R で相関のある 2 変量正規分布に従う乱数を生成し、その散布図を描いて検証しなさい。

ヒント Excel では、平均、標準偏差が μ_Y, σ_Y の正規乱数は「=NORM.INV(RAND(), μ_Y, σ_Y)」で生成できる。その生成された乱数を y としたとき、平均 $\mu_X + \rho\sigma_X(y - \mu_Y)/\sigma_Y$ 、標準偏差 $\sigma_X\sqrt{1 - \rho^2}$ の正規乱数を x とすると、 (x, y) が相関 ρ を持つ 2 変量正規乱数になる。R ならば、標準正規乱数は $y=rnorm(n)$ によって生成され、 $x=rnorm(n, y*r, sqrt(1-r^2))$ とすれば、 (x, y) は相関係数 r の 2 変量 (標準) 正規乱数となる。 ρ の値を $[-1, 1]$ の範囲で動かして、散布図を描き、形状の変化を観察しなさい。

2.9 極限定理

確率変数同士の関係や、収束を考えたり、未知の分布を考えると、以下のような極限定理が必要となる。

定理 1 (大数の弱法則) 独立同分布に従う確率変数列 $X_1, X_2, \dots$ に対して、その期待値を μ とすると、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、以下の式が成り立つ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \mu \right| < \varepsilon \right) = 1 \quad (2.74)$$

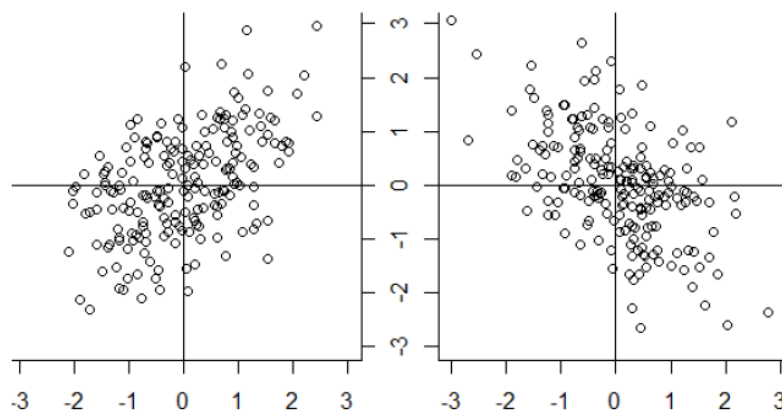


図 5 2 変量正規分布の相関

定理 2 (大数の強法則) 独立同分布に従う確率変数列 $X_1, X_2, \dots$ が有限の期待値 μ と有限の分散を持つとき、以下の式が成り立つ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \mu \quad w.p.1 \quad (2.75)$$

$w.p.1$ は「確率 1 で (with probability one)」という意味である。次のように書く場合もある。

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \mu\right) = 1 \quad (2.76)$$

定理 3 (中心極限定理) 独立同分布に従う確率変数列 $X_1, X_2, \dots$ が有限の期待値 μ と分散 σ^2 を持つとき、以下の式が成り立つ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} < z\right) = \Phi(z) \quad (2.77)$$

ただし、 $\Phi(z)$ は標準正規分布の累積分布関数を表す。

中心極限定理のモーメント母関数による証明：

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)}{\sqrt{n}\sigma}$$

と書き直すと、 Z_n のモーメント母関数は、 $X_i - \mu$ のモーメント母関数 $M_X(\theta)$ を使って

$$M_{Z_n}(\theta) = E(e^{\theta Z_n}) = \prod E\left(e^{\theta(X_i - \mu)/\sqrt{n}\sigma}\right) = M_X\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}\sigma}\right)^n$$

のように表される。

$n \rightarrow \infty$ のとき、これが標準正規分布のモーメント母関数 $\exp\left(\frac{\theta^2}{2}\right)$ に収束することを言えばよい。これはまた、 $\log M_{Z_n}(\theta) \rightarrow \frac{\theta^2}{2}$ と同じ。

$$\log M_{Z_n}(\theta) = n \log M_X\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}\sigma}\right)$$

ここで、 $n \rightarrow \infty$ とすると、不定形なので、ロピタルの定理を使って変形する。 $x = n^{-0.5}$ と置くと、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log M_{Z_n}(\theta) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log M_X\left(\frac{\theta}{\sigma}x\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^2}$$

分子の 1 回微分は

$$g'(x) = \frac{\frac{\theta}{\sigma} \frac{d}{dx} M_X\left(\frac{\theta}{\sigma}x\right)}{M_X\left(\frac{\theta}{\sigma}x\right)} \Rightarrow g'(0) = 0$$

なぜならば、 $\frac{d}{dx} M_X(0) = E(X_i - \mu) = 0$ だから。もう一回微分して、

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{\frac{\theta^2}{\sigma^2} \frac{d^2}{dx^2} M_X\left(\frac{\theta}{\sigma}x\right)}{M_X\left(\frac{\theta}{\sigma}x\right)} - \left(\frac{\frac{\theta}{\sigma} \frac{d}{dx} M_X\left(\frac{\theta}{\sigma}x\right)}{M_X\left(\frac{\theta}{\sigma}x\right)} \right)^2 \\ &\Rightarrow g''(0) = \theta^2 \end{aligned}$$

なぜならば、 $\frac{d^2}{dx^2} M_X(0) = V(X_i - \mu) = \sigma^2$ だから。分母の 2 回微分は 2 なので、それと併せて、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log M_{G_n}(\theta) = \frac{\theta^2}{2}$$

が示せた。

定理 4 (ドモアブル・ラプラスの定理) S_n をパラメータ n, p の 2 項分布に従う確率変数とすると、以下の式が成り立つ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < z\right) = \Phi(z) \quad (2.78)$$

ドモアブル・ラプラスの定理のモーメント母関数による証明： $X_1, X_2, \dots$ は独立に、

$$P(X_i = 1 - p) = p, P(X_i = -p) = 1 - p$$

という分布に従う確率変数とすると、

$$Z_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{np(1-p)}}$$

と書ける。 Z_n のモーメント母関数は、 X_i のモーメント母関数 $M_X(\theta)$ を使って

$$M_{Z_n}(\theta) = E(e^{\theta Z_n}) = \prod E\left(e^{\theta X_i / \sqrt{np(1-p)}}\right) = M_X\left(\frac{\theta}{\sqrt{np(1-p)}}\right)^n$$

のように表される。

$n \rightarrow \infty$ のとき、これが標準正規分布のモーメント母関数 $\exp\left(\frac{\theta^2}{2}\right)$ に収束することを言えばよい。これはまた、 $\log M_{Z_n}(\theta) \rightarrow \frac{\theta^2}{2}$ と同じ。

$$\begin{aligned} \log M_{Z_n}(\theta) &= n \log \left(p \exp\left(\frac{\theta(1-p)}{\sqrt{np(1-p)}}\right) + (1-p) \exp\left(-\frac{\theta p}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \right) \\ &= n \log \left(p \exp\left(\frac{\theta A}{\sqrt{n}}\right) + (1-p) \exp\left(-\frac{\theta}{A\sqrt{n}}\right) \right) \end{aligned}$$

ここで、 $A = \sqrt{\frac{1-p}{p}}$ と置いた。ここで、 $n \rightarrow \infty$ とすると、不定形なので、ロピタルの定理を使って変形する。 $x = n^{-0.5}$ と置くと、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log M_{Z_n}(\theta) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \left(p \exp(\theta A x) + (1-p) \exp\left(-\frac{\theta}{A} x\right) \right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^2}$$

分子の 1 回微分は

$$g'(x) = \frac{p\theta A \exp(\theta Ax) - (1-p)\frac{\theta}{A} \exp(-\frac{\theta}{A}x)}{p \exp(\theta Ax) + (1-p) \exp(-\frac{\theta}{A}x)} \Rightarrow g'(0) = 0$$

もう一回微分して、

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{p\theta^2 A^2 \exp(\theta Ax) + (1-p)\frac{\theta^2}{A^2} \exp(-\frac{\theta}{A}x)}{p \exp(\theta Ax) + (1-p) \exp(-\frac{\theta}{A}x)} \\ &\quad - \frac{(p\theta A \exp(\theta Ax) - (1-p)\frac{\theta}{A} \exp(-\frac{\theta}{A}x))^2}{(p \exp(\theta Ax) + (1-p) \exp(-\frac{\theta}{A}x))^2} \\ &\Rightarrow g''(0) = \theta^2 \end{aligned}$$

分母の 2 回微分は 2 なので、それと併せて、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log M_{Z_n}(\theta) = \frac{\theta^2}{2}$$

が示せた。

練習 2.30 Excel あるいは R を使ってコイン投げの実験を繰り返し、大数の法則を実感しなさい。具体的には、平均を取る実験の回数を 100 回、1000 回、10000 回と増やし、その標本平均のばらつきがだんだんと小さくなることを確かめなさい。実現確率をきちんと計算すると、ドモアブル・ラプラスの定理の検証にもなる (R ならば `mean(sample(2,10000,replace=T))-1` で 10000 回コイン投げの実験が出来る、速い)。

練習 2.31 Excel あるいは R を使って一様乱数を n 個生成し、その標本平均と 0.5 の差の絶対値が $1/\sqrt{12n}$ 以下になる相対度数を計算しなさい。その結果と中心極限定理の主張を比較しなさい。具体的には、 $n = 100, 1000, 10000$ などとして、一様乱数を n 個生成し、その標本平均が $0.5 - 1/\sqrt{12n}$ 以下になれば 1、さもなければ 0 というデータを 1 回の実験データとし、(Excel ならば) 再計算キーを押してデータを集め、相対度数を計算してその数値を中心極限定理で主張されている数値と比較してみる。

2.10 数学の公式

2.10.1 2 項係数

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad (2.79)$$

- パスカルの三角形

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k} \quad (2.80)$$

$$\binom{n}{m} = \sum_{k=m-1}^{n-1} \binom{k}{m-1} \quad (2.81)$$

- 超幾何級数、 $0 < m \leq \min\{N, M\}$ に対して

$$\sum_{k=0}^m \frac{\binom{N}{k} \binom{M}{m-k}}{\binom{N+M}{m}} = 1 \quad (2.82)$$

2.10.2 級数の和

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (2.83)$$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (2.84)$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (2.85)$$

$|r| < 1$ に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad (2.86)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)r^n = \frac{1}{(1-r)^2} \quad (2.87)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)r^n = \frac{2}{(1-r)^3} \quad (2.88)$$

2.10.3 極限

ロピタルの定理： $f(x), g(x)$ が $x = a$ で微分可能で $f(a) = g(a) = 0$ ならば

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (2.89)$$

分布関数 $F(x)$ に対して

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(1 - F(x)) = 0 \quad (2.90)$$

ネピア数（自然対数の底）

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a \quad (2.91)$$

十分大きい整数 n に対して、次の近似式が成り立つ（スターリングの公式）

$$n! \sim \frac{n^n}{\sqrt{2\pi n}} e^{-n}$$

「 $\sim$ 」は左辺と右辺の比が $n \rightarrow \infty$ のとき 1 に近づく、という意味を持つ記号。

2.10.4 不定積分

$$\int F'(x)G(x)dx = G(x)F(x) - \int F(x)G'(x)dx \quad (2.92)$$

$$\begin{aligned}
\int a e^{-ax} dx &= -e^{-ax} \\
\int a^2 x e^{-ax} dx &= -a x e^{-ax} + \int a e^{-ax} dx = -a x e^{-ax} - e^{-ax} \\
\int a^k x^{k-1} e^{-ax} dx &= -a^{k-1} x^{k-1} e^{-ax} + (k-1) \int a^{k-1} x^{k-2} e^{-ax} dx
\end{aligned}$$

2.10.5 定積分

ガンマ関数

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx = (t-1)\Gamma(t-1) \quad (t > 1) \quad (2.93)$$

$$I_{2n} = \int_{-\infty}^\infty x^{2n} e^{-x^2/2} dx \Rightarrow I_{2n} = (2n-1)I_{2n-2} = (2n-1)!!\sqrt{2\pi} \quad (2.94)$$

特に t が正整数ならば

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

$$\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}$$

$$\begin{aligned}
I_{2n} &= \int_{-\infty}^\infty x^{2n} e^{-x^2/2} dx \Rightarrow I_{2n} = (2n-1)I_{2n-2} = (2n-1)!!\sqrt{2\pi} \\
I_{2n-1} &= 0
\end{aligned}$$

ただし、 $n!!$ は $n(n-2)(n-4)\dots$

2.10.6 微分

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} (f(x)g(x)) &= g(x) \frac{d}{dx} f(x) + f(x) \frac{d}{dx} g(x) \\
\frac{d}{dx} f(g(x)) &= \frac{d}{dy} f(y) \frac{d}{dx} g(x) \quad (y = g(x)) \\
\frac{d}{dx} f^{-1}(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \int_a^x f(u) du &= f(x) \\
\frac{d}{dx} \int_x^a f(u) du &= -f(x) \\
\frac{d}{dx} \int_a^{g(x)} f(u) du &= f(g(x))g'(x)
\end{aligned}$$

演習問題

演習問題レポートの作り方

1. レポートを読めば分かるような書き方をしてください。
2. 特別な工夫をした場合はその箇所が分かるようにアピールしてください。
3. 最後までたどり着かなかった場合は、どのような考え方をしたのか、思索の過程、試行錯誤の過程を分かるように書いてください。

問題 2.1 パラメータ n, p の 2 項分布に従う確率変数を X 、それとは独立にパラメータ m, p の 2 項分布に従う確率変数を Y としたとき、 $X + Y$ はパラメータ $n + m, p$ の 2 項分布になることを、確率母関数を使って証明しなさい。ベルヌイ試行と 2 項分布の関係を利用して、この命題が成り立つ直感的な説明を与えなさい。

問題 2.2 大相撲で三力士が同じ勝ち星で 15 日間を終えると、巴戦で優勝を決める。巴戦とは勝ち残り で 2 人ずつ対戦し、最初に 2 連勝した力士を優勝とする方式です。最初に対戦して勝った力士、負けた力士、最初は控えに回った力士のそれぞれの優勝確率を計算しなさい。ただし、どの勝負も勝つ確率は五分五分とします。

問題 2.3 さいころ二つを使つての賭け。最初に振って和が 2 か 3 か 12 ならば負け、7 か 11 ならば勝ち。4 ならば和が 4 か 7 になるまで振り直し、最後に 4 が出たら勝ち、7 が出たら負け。5, 6, 8, 9, 10 の場合は 4 と同じように、最初に出た目か 7 が出るまで振り続け、最後に 7 が出たら負け、さもなければ勝ち。という賭の勝つ確率を計算しなさい。

問題 2.4 相関係数がプラスマイナス 1 の範囲にあることを証明しなさい。

ヒント $uX + Y$ の分散を u の 2 次関数と思って、何か考えなさい。

問題 2.5 確率変数 X, Y は互いに独立にパラメータ λ の指数分布に従うとき、 $X + Y = z$ という条件の下で X の条件付き密度関数を求めなさい。その結果から、指数分布の性質について論じなさい。

問題 2.6 パラメータ λ_k の指数分布に従う確率変数 X_k に対して、 $X_1, X_2, \dots, X_n$ の最小値を Y とする。また、その最小値となる番号を J とする。このとき、 Y と J は互いに独立であることを示し、それぞれの確率規則を調べなさい。

問題 2.7 $X_1, X_2, \dots$ は互いに独立でパラメータ λ の指数分布に従うものとします。また N はパラメータ p の幾何分布に従うものとします。このとき、 $X_1 + X_2 + \dots + X_N$ はどういう分布になりますか。

ヒント モーメント母関数を使って、条件付き期待値の公式を適用しなさい。

問題 2.8 ある工場の機械管理者の話。機械のある部品は故障した場合、すぐに新品と取り替えることにしていた。しかし、ある程度使った部品は壊れていなくても強制的に取り替えることによって、管理が容易になり、コストも抑えられるのではないかと考えた。つまり、取り付けてか

ら t 経過した部品は壊れていなくても強制的に取り替える。その場合のコスト B は、故障による取り替えのコスト A より、少なくてすむという。この取り替え方法が良いか悪いか、数量的な評価をしたい。部品の寿命を X 、その密度関数を $f(x)$ とする。二つの確率変数 Z, W を下のように定義する。

$$Z = \min\{t, X\}, W = \begin{cases} A & \text{if } Z < t \\ B & \text{if } Z = t \end{cases}$$

このとき、以下の問に答えなさい。

- (1) Z は何を表す確率変数ですか。言葉で説明しなさい。
- (2) W は何を表す確率変数ですか。言葉で説明しなさい。
- (3) Z の期待値を計算しなさい。
- (4) W の期待値を計算しなさい。
- (5) X がパラメータ λ の指数分布に従うとしたとき、 $E(W)/E(Z)$ を最小にする t の値を求めなさい。そして、なぜそれが最小になるのか、その意味を考えなさい。

問題 2.9 (1) X はパラメータ n, p の 2 項分布に従い、 Y は $X = m$ のときパラメータ m, r の 2 項分布に従うという。このとき、 $Y = k$ となる確率を計算しなさい。

(2) X はパラメータ a のポワソン分布に従い、 Y は $X = m$ のときパラメータ m, r の 2 項分布に従うという。このとき、 $Y = k$ となる確率を計算しなさい。

(3) $np = a$ として $n \rightarrow \infty$ としたとき、(1) と (2) の結果を比較せよ。

問題 2.10 X_i, Y_i はそれぞれパラメータ p, r のベルヌイ分布に従い、 $Z_i = X_i Y_i$ と定義したとき、 $\sum_{i=1}^n Z_i$ はどのような分布になりますか。結果を見て、その意味を考えなさい。

3 ポワソン過程

最初は、ある事象が繰り返し起きる場合に、その事象の起きる時刻や頻度に着目して、それらを説明する確率過程モデルを考える。 T_i を i 番目の事象の起きる時刻としよう。事象が起きることを事象が到着したという言い方をすることがある。 $N(t)$ は T_i で 1 増加するものとしよう。すなわち、 $N(t)$ は $T_i \leq t$ となるような T_i の個数を表すものとする。言い換えれば、区間 $[0, t]$ における事象の到着数を表す。到着の数を数えるという意味で、 $\{N(t), t \geq 0\}$ は計数過程と呼ばれる。

ランダムに起きる事象に対する最初の興味は「いつ起きるのか」「どれくらいの頻度で起きるのか」など、事象の起きる回数に関係している。事象の生起回数を記録する計数過程、その特別な場合として、2 項過程、その連続時間版としてポワソン過程を解説する。ポワソン過程は、統計における正規分布のように、連続時間確率過程の基礎にある基本的な確率過程である。

3.1 2 項過程

離散時間パラメータを持つ確率過程のもっとも単純な場合を考える。ある特定の確率事象に着目し、その事象の起こり方に対する確率規則を与えるのがベルヌイ試行、2 項過程である。

3.1.1 ベルヌイ試行 (Bernoulli trial)

コイン投げのように、同じ条件で独立にランダムな実験を繰り返すことができる状況を考える。ランダムな実験を試行という。1 回の試行で起こりうる事象の一つに着目し、繰り返し試行の中でその事象が起きるか起きないかという試行結果を状態とした確率過程をベルヌイ試行という。その事象が起きれば試行は成功した、さもなければ失敗した、とすることにする。事象の起きる確率 p をベルヌイ試行のパラメータという。

定義 3.1 $X_1, X_2, \dots$ は独立で、同じ分布

$$P(X_n = 1) = p, P(X_n = 0) = 1 - p, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.1)$$

に従うとき、 $\{X_n, n = 1, 2, 3, \dots\}$ をパラメータ p のベルヌイ試行という。特に、最初の部分列 $\{X_n, n = 1, 2, 3, \dots, m\}$ を、長さ m のベルヌイ試行ということがある。

$X_n = 1$ ならば n 回目のベルヌイ試行は成功した、 $X_n = 0$ ならば失敗した、と表現する。 $\{X_n, n = 1, 2, 3, \dots\}$ の状態空間は $\{0, 1\}$ 、時間パラメータは正の自然数全体である。

各試行は独立であることから、 $X_n, n = 1, 2, 3, \dots$ の結合確率は以下の通り：

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = p^m (1 - p)^{n-m}, \quad \left(m = \sum_{k=1}^n x_k \right) \quad (3.2)$$

結合確率が分かっているので、確率構造は完全に規定される。

例 3.1 最近の世論調査はランダムに選んだ電話番号に電話して、応対に出た場合人に対して調査協力を依頼する、という方式がとられることが多い（ランダムディジットダイアリングという）。このとき、電話を掛けて出るか出ないかを調べる（観察する）のがランダム試行、電話が

つながることを成功としたとき、この試行は（電話番号がランダムに選ばれていることから）独立試行と考えられるので、ベルヌイ試行になると言って良い。

3.1.2 2項過程 (binomial process)

定義 3.2 $\{X_n, n = 1, 2, 3, \dots\}$ をパラメータ p のベルヌイ試行とする。 $\{X_i\}$ の部分和を

$$\begin{aligned} S_0 &= 0 \\ S_n &= X_1 + X_2 + \dots + X_n = S_{n-1} + X_n, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

によって定義したとき、 $\{S_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ をパラメータ p の2項過程という。

S_n はベルヌイ試行を n 回繰り返したときの成功回数を表す、といって良い。 $\{S_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ の状態空間は非負の整数全体、時間パラメータも非負の整数全体となる。時点 n で可能な状態は 0 以上 n 以下の整数であるが、各時点毎に別々の状態空間を定義するのは煩わしいので、すべての状態空間の和集合を最初から状態空間と考える。

命題 3.1 S_n はパラメータ n, p の2項分布に従う

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (3.4)$$

例 3.2 ランダムディジットダイアリングを使った調査で、 S_n を n 人に電話を掛けた直後にそれまでにつながった（協力が得られた）回答者数とすると、 $\{S_n\}$ は2項過程になる。この場合の時間パラメータは観察時刻ではなくて、電話を掛けた回数になる。たとえば1000人に電話した場合の回収率を調べたければ S_{1000} の分布が必要になる。あるいは、1000人が協力してくれるまでに何回電話をしなければいけないか、という問題を解くためには $S_n = 1000$ となる n について調べる必要がある。

練習 3.1 S_n がパラメータ n, p の2項分布に従うことを証明しなさい（数学的帰納法を使う）。

練習 3.2 $S_n = i, S_{n+m} = k$ となる結合確率を計算しなさい、ただし $m > 0, k \geq i$ とする

3.1.3 事象の到着間隔

事象が起きる時刻を事象の到着時刻ともいう。 k 番目の事象の到着時刻を T_k としたとき、 T_k は k 番目の事象の待ち時間ということがある。 $T_0 = 0$ として、

$$Y_k = T_k - T_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

と定義するとき、 Y_k は ($k-1$ 番目と k 番目の) 事象の到着間隔という。

ベルヌイ試行での事象の到着間隔を考える。 $Y_1 > n$ ということはベルヌイ試行で n 回連続失敗することと同じなので、次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} P(Y_1 > n) &= (1-p)^n \\ \Leftrightarrow P(Y_1 = n) &= P(Y_1 > n-1) - P(Y_1 > n) = (1-p)^{n-1}p \end{aligned}$$

つまり、 Y_1 はパラメータ p の幾何分布に従う。以下、 $Y_2, Y_3, \dots$ においても同様の議論によって、次の命題が導かれる。

命題 3.2 パラメータ p のベルヌイ試行において、事象の到着間隔はパラメータ p の幾何分布に従う

3.1.4 幾何分布の無記憶性 (memoryless property)

Y がパラメータ p の幾何分布に従うとき、次の式が成り立つ。

$$P(Y > n + m | Y > m) = \frac{P(Y > n + m)}{P(Y > m)} = (1 - p)^n = P(Y > n) \quad (3.6)$$

この性質を無記憶性という。 Y を人間の寿命に擬えると、左辺は m より長く生きるという条件のもとで、さらにもう n 年以上生きるということで、「余命」の補分布関数（累積分布関数を 1 から引いたもの）ということが出来る。一方、最右辺は寿命の補分布関数なので、余命と寿命の確率分布が等しい、というのが無記憶性。無記憶性を持つ離散分布は幾何分布に限る。

事象の到着間隔が分かれば、時点 t までの事象の生起回数分かる。逆も同じ。したがって、2 項過程は事象の到着間隔が幾何分布に従うような繰り返し生起する事象の到着回数の従う確率過程、ということもできる。

3.2 計数過程

一般に、繰り返し起きる特定の確率事象に着目し、その生起回数を確率過程と考えたものを計数過程 counting process という。2 項過程の場合はベルヌイ試行から構成されたが、一般には、事象の生起間隔を使って定義される。生起間隔が幾何分布の場合が 2 項過程で、計数過程の特別な例である。

生起間隔の分布の定義域が $1, 2, 3, \dots$ のような離散点とは限らない場合、連続時間パラメータを持つ計数過程が定義される。銀行の ATM へ利用客が到着するとか、生産ラインで不良品が発生する、というように、ランダム事象 A が連続時間で繰り返し起きるとき、ある時間区間の間にその事象の起きる回数を確率過程と考えたものである。

確率変数を使って表現しよう。 $N(t)$ を区間 $[0, t]$ の間に事象 A の起きる（事象が到着する、とも言う）回数としたとき、 $\{N(t), t \geq 0\}$ を計数過程という。 $N(t)$ のサンプルパスは、事象 A が起きた時点で 1 上にジャンプし、それ以外の点では直前の状態と同じ、というような右連続の階段関数状になる。状態空間は非負整数全体とする。通常は、同時に二つ以上の事象が到着することは考えない。事象が離散点でしか起きない場合は $\{N_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ を離散計数過程ということもある。

3.3 ポワソン過程

3.3.1 ポワソン過程の導出

事象が連続時間で起きる場合の計数過程 $\{N(t), t \geq 0\}$ を考える場合でも、時間の計測がミリ秒単位でしか出来なくて、1 ミリ秒の間には高々 1 回しか起きないと仮定すると、離散時間モデルで近似することが出来る。 Δt を非常に小さい時間の単位として、区間 $((n-1)\Delta t, n\Delta t]$ の間に事象が（1 回以上）起きたら n 回目の試行では成功、さもなければ（1 回も起きなければ）失敗と定義すると、ベルヌイ試行を構成することが出来て、そのベルヌイ試行から 2 項過程を作る

ことが出来る。それを $\{\tilde{N}(n\Delta t), n = 0, 1, 2, \dots\}$ と記す。

もし Δt の間に 2 回以上起きることがなければ、時刻 $n\Delta t$ では連続時間の計数過程と近似 2 項過程は同じ値になるが、微小間隔の間に連続して事象が起きるような場合は、 Δt が大きいと、 $\tilde{N}(n\Delta t)$ が 1 増える間に $N(t)$ が 2 以上増える可能性があり、両者は一致しない。しかし、 Δt が十分に小さくとれば、全く同時に起きるということがない限り、この仮定は成り立つと考えて良い。

$t = n\Delta t$ とすると、2 項分布の計算から

$$\begin{aligned} E(\tilde{N}(n\Delta t)) &= np = \frac{t}{\Delta t}p \\ V(\tilde{N}(n\Delta t)) &= np(1-p) = \frac{t}{\Delta t}p(1-p) \end{aligned}$$

などが導かれる。ただし、 p は Δt 間隔の間に事象が 1 回以上起きる確率を表す。 $E(\tilde{N}(n\Delta t))$ は np に等しく、見かけ上は n に伴って大きくなるように見えるが、 $\tilde{N}(n\Delta t)$ は $N(t)$ を離散時間で観測したもので、 n は観測精度だけの問題だから、 n を大きくしたからといって事象の生起回数が変わることはないはず。したがって、 np はほぼ一定に保たれていなければいけない。実際、 $\{N(t), t \geq 0\}$ に関して、単位時間の間の事象の平均生起回数を λ とすると、

$$E(N(t)) = \lambda t \approx E(\tilde{N}(n\Delta t)) = \frac{p}{\Delta t}t$$

なので、 $\Delta t \rightarrow 0$ のとき、あるいは $n \rightarrow \infty$ のとき、 $p \rightarrow 0$ でなければならない。

もし Δt の間に 2 回以上の事象が起きることは無視してよいほど Δt が非常に小さいのであれば、 $\{N(t), t \geq 0\}$ は離散点で $\{\tilde{N}(t), t \geq 0\}$ と同じ値を取るの、その確率分布を計算することが出来る。すなわち、 $t = n\Delta t$ に対して次の式が成り立つ

$$P(N(t) = k) \approx P(\tilde{N}(n\Delta t) = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} (\lambda \Delta t)^k (1 - \lambda \Delta t)^{n-k}$$

$\Delta t \rightarrow 0$ とすることを考えているので、 $n \gg k$ を仮定すると、

$$P(N(t) = k) \approx \frac{n^k}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}t\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}t\right)^n \approx \frac{(\lambda t)^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}t\right)^n$$

ここで $n \rightarrow \infty$ とすれば、よく知られた式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

から

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

が導かれる。ここでは $t = n\Delta t$ を保って $n \rightarrow \infty$ としたが、そのような制約なしに、任意の t で等式で成り立つことが言える。

最後に得られたのはパラメータ λ のポワソン分布の確率関数になっている。そこで、連続時間の計数過程 $\{N(t), t \geq 0\}$ で、 $N(t)$ の確率関数が次の式で与えられるものをパラメータ λ のポワソン過程という。ポワソン Poisson は人の名前。

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

$\Delta t \rightarrow 0$ とする一歩手前で止めておくと、ポワソン過程は2項過程と見なして良いので、ポワソン過程の問題を考えると、成功する確率がほとんど0のベルヌイ試行を $\Delta t (\rightarrow 0)$ 間隔に猛スピードで行うようなものを想定して分析すると分かりやすいことが多い。

3.3.2 ポワソン過程の定義

2項過程の極限としてポワソン過程を「導いた」が、「定義をした」わけではない。定義は上の導出で暗黙のうちに利用している性質をきちんと記述することが必要。

定義 3.3 確率過程 $\{N(t), t \geq 0\}$ がパラメータ λ のポワソン過程であるとは、次の条件を満たす場合を言う

- (1) $N(0) = 0$
- (2) 任意の $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ に対して、 $N(t_2) - N(t_1)$ と $N(t_4) - N(t_3)$ が独立
- (3) 任意の $t > 0, s \geq 0$ に対して、 $N(s+t) - N(s)$ がパラメータ λt のポワソン分布に従う

$$P(N(s+t) - N(s) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

$N(s+t) - N(s)$ は $(s, s+t]$ における事象の生起回数（時点 s から時点 $s+t$ の間に増えた数）を表すので、これを増分 increment という。2番目の性質は独立増分性という。3番目は、増分の確率分布が時刻によらず、時間間隔だけに依存するということを意味しており、この性質は定常増分性という。これらの言葉を使うと、ポワソン過程とは、独立増分性、定常増分性を持ち、増分がポワソン分布に従うような確率過程、と言ってもよい（1番目の仮定は暗黙のうちに認める）。

例 3.3 航空機事故の生起パターンはポワソン過程に従うと言われる。その理由を考える。事故は離着陸時に起きると言われているので、各航空機の離発着時点で事故を起こすということを成功とするようなベルヌイ試行をすべての航空機分集めてみる。ベルヌイ試行の成功確率は非常に小さく、離発着はミリ秒単位で起きていると考えれば、ポワソン過程を近似する離散計数過程の条件を満たしている。

例 3.4 生産ラインのメンテナンスをする場合、機械の故障にポワソン過程を想定して対策を考えることが多い。これも、航空機事故と同じように、故障するチャンスは微小時間間隔で無数にある、と考えれば納得できなくもない

例 3.5 一般に、あるモノの故障生起に関してその対策を講じるために数理モデルを使って解析する方法論を信頼性理論といい、故障というランダム事象の生起パターンにポワソン過程を想定することが通常行われている。

3.4 ポワソン過程の特徴

3.4.1 整列性

定義の3項目で、 t を微少量 Δt と考えると、

$$\begin{aligned}
P(N(s + \Delta t) - N(s) = 0) &= e^{-\lambda \Delta t} = 1 - \lambda \Delta t + \cdots = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t) \\
P(N(s + \Delta t) - N(s) = 1) &= \lambda \Delta t e^{-\lambda \Delta t} = \lambda \Delta t (1 - \lambda \Delta t + \cdots) = \lambda \Delta t + o(\Delta t) \\
P(N(s + \Delta t) - N(s) \geq 2) &= 1 - P(N(s + \Delta t) - N(s) < 2) = o(\Delta t)
\end{aligned}$$

これは、微少間隔の間に 2 回以上の事象が同時に起きる可能性は 0 と考えて良い、ということを表す、つまり、事象はすべて生起した順番に曖昧さのない順番が付けられる。これを整列性という。

Δt を非常に小さい数とすれば、間隔 Δt の間に事象が (1 回以上) 起きる確率 $\lambda \Delta t$ は非常に小さい数となる。小さい数ながらも、常に一定の確率で事象が起きようとした結果、区間 $[0, t]$ の間に起きる事象の数 $N(t)$ はパラメータ λt のポワソン分布に従うことが導かれた。一般に、事象の起きるチャンスはたくさんあっても、その事象の起きる確率が非常に小さい場合の事象の生起回数はポワソン分布が当てはまることが知られている。このことから、ポワソン分布は稀現象の法則 (law of rare events) と呼ばれる。

例 3.6 工場でのラインストップ：ラインストップには様々な原因が考えられるが、それら一つ一つは毎秒故障の可能性を抱えながら運転している、毎秒ごとに故障する確率は非常に小さいので、故障が発生するのは非常に稀である。したがって、稀現象の法則が当てはまる。

例 3.7 地震の発生：これも同様に何かのきっかけでエネルギー放出が起きるが、その可能性は毎秒非常に小さい確率ではあるが、否定できない。

練習 3.3 A4 用紙 30 枚の資料を作るのに 6 万回キーボード入力が必要であった。出来上がった資料に 20 箇所のミスタイプが発見されたとしよう。一つのミスタイプは 1 回のミスタイプが原因であるとして、ミスタイプする確率をいくつくらいに見積もればよいですか。最初の 10 ページに一つもミスタイプがない確率は 3 分の 1 より大きいですか、小さいですか。

3.4.2 到着間隔の無記憶性

$N(t) = 0$ ということは、最初の事象の到着時刻 T_1 (事象の到着間隔 Y_1 と言っても同じ) が t より大きいということなので、

$$P(T_1 > t) = P(Y_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t} \quad (3.9)$$

が成り立つ。最右辺はパラメータ λ の (平均 λ^{-1} の) 指数分布の補分布になっている、したがって、 T_1 はパラメータ λ の指数分布に従う。

ベルヌイ試行の性質を受け継いでいるので、次の事象がいつ起きるか、全く予測が出来ないという特徴がある。ある時点で、将来の事象の到着時刻を予想するとき、現実には多くの場合、直前の事象の到着時刻からある程度予測が可能であるが、ベルヌイ試行の場合はそのような過去の出来事が将来の動きに全く影響を与えないという特徴がある。その特徴は確率の記号を使って次のように表すことが出来る。

$$P(Y > t + s \mid Y > s) = P(Y > t) \quad (3.10)$$

確率変数 Y が上の式を満たすとき、 Y は無記憶性を持つと言われる。

現実の問題で考えたとき、無記憶性は、コイン投げのような理想状態を除いて仮定できるケースは考えにくい。たとえば、iPod の壊れるまでの時間を考えてみると、半年使っていても1年使っていても、次の1ヶ月間に故障する確率はほとんど同じと考えて良い。これは iPod の壊れるまでの時間という確率変数が無記憶性を持っていると言えなくもない。

練習 3.4 確率変数 Y がパラメータ λ の指数分布に従っているとき、 Y は無記憶性を持つことを確かめなさい。

練習 3.5 ある銀行の融資窓口には 30 分に 1 人の割合で客が到着する。客の到着がポワソン過程に従っているとして、(1)9 時から 12 時までに客が一人も来ない確率はいくつですか。(2) 正午を過ぎて初めての客が来るまでの平均時間はどれくらいですか。

練習 3.6 客が店にパラメータ 2 のポワソン過程に従って到着する、単位時間は 1 時間とする。このとき、30 分間にちょうど 1 人の客が到着する確率はいくつですか

3.4.3 指数分布の特徴

無記憶性から派生する様々な特徴をまとめておく。

補題 5 X, Y は互いに独立で、それぞれパラメータ λ, μ の指数分布に従うとき、 $\min\{X, Y\}$ はパラメータ $\lambda + \mu$ の指数分布に従う。一般に、 $X_1, X_2, \dots, X_n$ は互いに独立で、それぞれパラメータ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ の指数分布に従うとき、 $\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ はパラメータ $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ の指数分布に従う。

$\{\min(X, Y) > t\}$ という事象は $X > t$ かつ $Y > t$ という事象と同じ。 X, Y が互いに独立であることを使って計算すると、

$$P(\min\{X, Y\} > t) = P(X > t, Y > t) = P(X > t)P(Y > t) = e^{-(\lambda+\mu)t} \quad (3.11)$$

これは $\min\{X, Y\}$ がパラメータ $\lambda + \mu$ の指数分布に従うことを意味する。変数の数が増えても、同じ考え方で証明できる。

補題 6 X, Y は互いに独立で、それぞれパラメータ λ, μ の指数分布に従うとき、次の式が成り立つ

$$P(X < Y) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \quad (3.12)$$

指数分布はベルヌイ試行を離散化したもので、そのパラメータは成功する確率と同じように考えて良い。したがって、 $\lambda : \mu$ の割合で $X < Y$ となるか $X > Y$ となるかが決まる、と考えて良い。

X に条件を付けてきちんと計算することも出来る

$$P(X < Y) = \int_0^\infty e^{-\mu t} \times \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

補題 7 ランダム個数の指数分布の和はやはり指数分布になる。すなわち、 N がパラメータ p の幾何分布にしたがい、 $X_1, X_2, \dots$ は互いに独立にパラメータ λ の指数分布に従うとき、 $X_1 + X_2 + \dots + X_N$ はパラメータ λp の指数分布に従う。

モーメント母関数を利用すると証明が容易。指数分布のモーメント母関数は $E(e^{\theta X}) = \lambda/(\lambda - \theta)$ 、したがって、 $X_1 + X_2 + \dots + X_N$ のモーメント母関数が $\lambda p/(\lambda p - \theta)$ になることを言えばよい。

$$\begin{aligned} E(e^{\theta(X_1+X_2+\dots+X_N)}) &= E(E(e^{\theta(X_1+X_2+\dots+X_N)} \mid N)) \\ &= \sum (E(e^{\theta X}))^n (1-p)^{n-1} p = \frac{pE(e^{\theta X})}{1 - (1-p)E(e^{\theta X})} \\ &= \frac{\lambda p}{\lambda p - \theta} \end{aligned}$$

これはパラメータ λp の指数分布のモーメント母関数なので、 $X_1 + X_2 + \dots + X_N$ はパラメータ λp の指数分布に従う。

練習 3.7 MD 付きラジオは、ラジオの寿命が平均 5 万時間、MD の寿命が平均 2 万時間で、いずれも指数分布に従っているものとする。MD が原因で故障する割合はどれくらいですか。

練習 3.8 2 人の係員のいる郵便局に A, B, C の 3 人が同時に入ってきた。 A, B が先にサービスを受けて C が待っている。サービス時間が次の場合に、 C が最後に退去することになる確率を求めなさい。(1) どの人もきっちり 3 分という場合、(2) どの人も、1 分、3 分、5 分の確率がそれぞれ $1/3$ ずつという離散分布にしたがっている場合、(3) 平均 3 分の指数分布の場合。

練習 3.9 (続) 要求サービス量は同じだが、係員の能力に差があって、二つの窓口のサービス時間はそれぞれ平均 2 分、3 分の指数分布に従うものとしたとき、 A, B が C よりも先にサービスを終える確率を求めなさい。

3.4.4 事象の一様性

n 回のコイン投げで 1 回だけ表が出た、表が出たのは何回目でしょう、という質問には「分からない」というのが答え。ベルヌイ試行でも同じ、その連続化の極限も同じ。 $N(t) = 1$ 、すなわち区間 $[0, t]$ で事象が 1 回だけ到着したとき、それが前半、すなわち $[0, t/2]$ の間に到着した可能性は 5 割。確率変数で表すと、

$$P(T_1 < x \mid N(t) = 1) = \frac{x}{t}, \quad 0 \leq x \leq t \quad (3.13)$$

区間 $[0, t]$ で事象が 2 回到着した場合も、その到着時刻を特定することは出来ない。つまり、回数だけからは過去の確率事象（到着時刻）を推測できない。一般的に確率変数を使ってこのことを表現すると、次のようになる。

$U_1, U_2, \dots, U_n$ は $[0, t]$ 上の一様分布に従う互いに独立な確率変数。それらを小さいもの順に並べたものを

$$U_{(1)} \leq U_{(2)} \leq \dots \leq U_{(n)}$$

とする。 $N(t) = n$ という条件の下で、 $T_1, T_2, \dots, T_n$ の結合分布関数は $U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(n)}$ の結合分布関数と等しい。

例 3.8 (現在価値) ポワソン過程に従って 100 万円ずつ寄付があるとする、 $[0, t]$ 区間における

寄付金の総額の現在価値の期待値は、割引率を β とすると、以下のように計算できる。

$$E \left(\sum_{k=1}^{N(t)} 100e^{-\beta T_k} \right) = E \left(E \left(\sum_{k=1}^{N(t)} 100e^{-\beta T_k} \middle| N(t) \right) \right)$$

一方、

$$\begin{aligned} E \left(\sum_{k=1}^n 100e^{-\beta T_k} \right) &= nE(100e^{-\beta U_1}) = 100n \int_0^t e^{-\beta u} \frac{du}{t} \\ &= \frac{100n}{\beta t} (1 - e^{-\beta t}) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} E \left(\sum_{k=1}^{N(t)} 100e^{-\beta T_k} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{100n}{\beta t} (1 - e^{-\beta t}) \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \\ &= \frac{100\lambda}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) \end{aligned}$$

練習 3.10 ポワソン過程で最初の事象が到着する時刻を T_1 とすると、以下の式が成り立つことを示しなさい。どういう意味がありますか。

$$P(T_1 < x \mid N(t) = 1) = \frac{x}{t}$$

ヒント $(N(t) = 1) \Leftrightarrow (T_1 \leq t < T_1 + T_2)$ を使って計算する。

練習 3.11 2次元の場合に上の記述を確かめなさい。すなわち、パラメータ λ のポワソン過程 $\{N(t), t \geq 0\}$ で1番目、2番目の事象の到着時刻をそれぞれ T_1, T_2 とする。また、 U_1, U_2 を区間 $[0, 1]$ で一様分布する独立な確率変数とし、 $U_{(1)} = \min\{U_1, U_2\}, U_{(2)} = \max\{U_1, U_2\}$ と置く。このとき、 $N(1) = 2$ という条件の下で、 $(U_{(1)}, U_{(2)})$ の結合分布と (T_1, T_2) の結合分布が一致することを示しなさい。

練習 3.12 ある銀行の窓口に3時間の間に20人来たとすると、最初の1時間の間に来た客の数はどれくらいと推測できますか。

ヒント ある客がいつ来たか分かりますか。

3.4.5 多数の計数過程の重ね合わせ

十分に多くの計数過程を合成すると、ポワソン過程で近似することができる。この性質は、数理統計学における中心極限定理、すなわち、任意の分布に従う確率変数の平均はほぼ正規分布で近似できる、という事実を思い出させる。中心極限定理が数理統計学で重要な位置を占めているのと同様、ポワソン過程は、確率過程の中心的役割をはたす。

電話の通話要求の時点列はポワソン過程によって説明できるということが多くの実証研究で裏付けられている。一人の通話要求を累積したものは計数過程と考えることが出来て、ある基地局への通話要求は多くの加入者の通話要求、つまり計数過程の和になっていると考えると、ポワソン過程の近似が説明出来る。一人の通話要求はその個人にとってはある規則にしたがっているの

かもしれないが、そのようなものが不特定多数集まると、全体としてはランダムな、いつ通話要求が来るか分からない、というパターンが生まれるということは興味深い。一般に、不特定多数が共通の施設を使うために到着する時点列はポワソン過程でモデル化することができる。このような到着過程のことをポワソン到着という。

例 3.9 不特定多数の客が限られた施設を利用するときの混雑現象を分析するための方法論は待ち行列理論と呼ばれる。一人一人はそれぞれ自分の都合で到着時刻を選んでいるのだろうが、それらを多数集めて、不特定多数の客全体を考えると、ポワソン到着のような振る舞いになる。そのため、待ち行列理論のモデルではポワソン到着を仮定することが多い。

3.4.6 ポワソン過程の合成、分解

ポワソン過程には、ポワソン過程をいくつ重ね合わせてもポワソン過程になるという性質がある。実際、最初にどれかの事象が起きるまでの間隔は、指数分布の最小値の分布に従うので、指数分布になる。無記憶性により、その時点から数えて次の事象が起きるまでの間隔も指数分布となる。その時点から数えて…。つまり、事象の到着間隔が指数分布に従う計数過程なので、ポワソン過程になる。

確率変数を使った議論では、例えば二つのポワソン過程を重ね合わせたものがポワソン過程になることを言うには、確率母関数を使うと簡単である。 $N(t), M(t)$ をそれぞれパラメータ λ, μ のポワソン過程とすると、その和の確率母関数は

$$\begin{aligned} E(z^{N(t)+M(t)}) &= E(z^{N(t)})E(z^{M(t)}) = e^{-\lambda t(1-z)}e^{-\mu t(1-z)} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)t(1-z)} \end{aligned}$$

となる。最後の式は $N(t) + M(t)$ がパラメータ $\lambda + \mu$ のポワソン分布に従っていることを示す。独立増分は明らか。

練習 3.13 $N(t), M(t)$ をそれぞれパラメータ λ, μ の互いに独立なポワソン過程としたとき、 $N(t) + M(t)$ が独立増分を持つ計数過程であることを証明しなさい。

パラメータ λ のポワソン過程で事象が到着したとき、確率 p でカウントし、確率 $1 - p$ で無視する、という計数過程を $N_1(t)$ とすると、 $N_1(t)$ はパラメータ λp のポワソン過程になる。実際、ベルヌイ試行と同時に表が出る確率が p のコインを投げ、ベルヌイ試行が成功し、コインも表が出た場合にのみ「成功した」とするような試行を考えれば、その試行はベルヌイ試行になるということから、その連続化極限を考えれば納得できる。

無視されたものだけを計数した計数過程を $N_2(t)$ とすると、 $N_2(t)$ ももちろん計数過程になるが、興味深いのは、分解されたそれら二通りのポワソン過程 $N_1(t), N_2(t)$ がお互いに独立であるということである。 $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ なのだから、強い相関があると思うのが普通だが、そうはなっていないところが「直感」に反している（直感が「はやとちり」というだけなのだが）。実際、

$$\begin{aligned}
P(N_1(t) = j, N_2(t) = k) &= P(N_1(t) = j, N(t) = j + k) \\
&= P(N_1(t) = j | N(t) = j + k) P(N(t) = j + k) \\
&= \binom{j+k}{j} p^j (1-p)^k \frac{(\lambda t)^{j+k}}{(j+k)!} e^{-\lambda t} \\
&= \frac{(\lambda p t)^j}{j!} \frac{(\lambda(1-p)t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = P(N_1(t) = j) P(N_2(t) = k)
\end{aligned}$$

練習 3.14 来店客の 2 割だけが実際に買い物をするとして、午前中に 10 人の客が来た場合に、そのうち 2 人が買い物をした確率はいくつか。2 人以下の確率はいくつか。

練習 3.15 $\{N(t), t \geq 0\}$ をパラメータ λ のポワソン過程、 $\{L(t), t \geq 0\}$ をパラメータ μ のポワソン過程としたとき、 $\{N(t) + L(t), t \geq 0\}$ がパラメータ $\lambda + \mu$ のポワソン過程になることを示しなさい

ヒント 確率母関数を使いなさい。

練習 3.16 $\{N(t), t \geq 0\}$ をパラメータ λ のポワソン過程とし、奇数番目の事象の到着だけを数える計数過程を $\{M(t), t \geq 0\}$ としたとき、 $\{M(t), t \geq 0\}$ はポワソン過程になりますか。理由を付けて答えなさい。

ヒント 事象の到着間隔が指数分布になるかどうか調べなさい。

練習 3.17 $\{N(t), t \geq 0\}$ をパラメータ λ のポワソン過程とし、事象が到着したらコインを投げて表がでた場合だけカウントする、としたとき、この計数過程はポワソン過程になることを直感的に説明しなさい。その説明を裏付けるために証明しなさい。コインを投げる代わりに、奇数番目の事象は無視することにした場合は、無視されなかった事象の確率規則はポワソン過程に従うか。直感的に答えなさい。また、(微小間隔で) ベルヌイ試行を無数に繰り返したものがポワソン過程であるという考え方を使って、直感的な答えのもっともらしさを説明しなさい。

3.5 複合ポワソン過程

客がランダムに到着して買い物に応じて金額を支払って行く、交通事故がランダムに発生し、死者が出たり出なかったりする、というように、ランダムな事象の到着(支払い客の到着、事故発生)と同時に別の確率変数(買い物金額、その事故による死亡者数)が観測される場合に、その確率変数を累計したものの確率変動を分析するためのモデルとして、複合ポワソン過程がある。 $\{N(t), t \geq 0\}$ をポワソン過程、 $Y_1, Y_2, \dots$ は独立同分布する確率変数列として、

$$Z(t) = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{N(t)}, \quad t \geq 0 \quad (3.14)$$

によって $Z(t)$ を定義したとき、 $\{Z(t), t \geq 0\}$ を複合ポワソン過程 compound Poisson process という。

ポワソン過程で事象が到着すると確率変数 Y が観測されて、それを累積したものに興味がある、という場合のモデルである。サンプルパスはポワソン過程で事象が到着するたびに、不定量ジャンプし、それ以外は変化がないという、非減少とは限らない階段状の関数になる。

例 3.10 保険会社が支払う保険金はランダムに起きる事故によって、ランダムに決まる請求額に

よって支払われる。1 週間の保険金支払額の合計は複合ポワソン過程にしたがって計算される

例 3.11 株価はランダムな取引によってランダムな価格変動を起こす。1 時間後の株価の変化は複合ポワソン過程によって計算される。ランダムウォーク仮説によれば、1 回の取引によって引き起こされる価格変動は独立同分布に従う。

命題 3.3 複合ポワソン過程 $Z(t)$ の期待値は、時刻 t までに到着する事象の平均個数に、 Y の期待値を掛けたものに等しい。

期待値に関しては、条件付き期待値の公式から次の式が得られる。直感的に言えば、 $[0, t]$ の間に起きるイベントの平均回数に、各イベントで観測されるランダムな量の期待値を掛けたもの、とまとめることが出来る。

$$\begin{aligned} E(Z(t)) &= E(E(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{N(t)} \mid N(t))) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n E(Y) \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = E(Y) E(N(t)) \end{aligned} \quad (3.15)$$

練習 3.18 管内の 1 週間の交通事故件数はほぼ 100 件、1 件あたりの死亡者（24 時間以内死者）は 0.1 人だという。これからの 1 週間に交通事故で死ぬ人の数の平均はいくつか。

3.5.1 複合ポワソン過程の確率分布

一般には、 $N(t)$ に関して条件を付け、条件付き期待値の公式を適用することにより、 $Z(t)$ のモーメント母関数を計算することが出来る。

$$M_{Z(t)}(\theta) = E(e^{\theta Z(t)}) = E(E(e^{\theta(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{N(t)})} \mid N(t))) \quad (3.16)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{\theta Y})^n \times P(N(t) = n) \quad (3.17)$$

Y のモーメント母関数を $M_Y(\theta) = E(e^{\theta Y})$ と記すと、これは $N(t)$ の確率母関数 $G_{N(t)}(z)$ の式で変数を $M_Y(\theta)$ と置いたものに他ならない。 $N(t)$ はパラメータ λt のポワソン分布に従うので、その確率母関数は次式で与えられる。

$$G_{N(t)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = \exp(-\lambda t(1 - z)) \quad (3.18)$$

従って、 $Z(t)$ のモーメント母関数は

$$E(e^{\theta Z(t)}) = \exp(-\lambda t(1 - M_Y(\theta))) \quad (3.19)$$

によって与えられる。

$Y_1, Y_2, \dots$ が非負の離散型確率変数ならば、 $Z(t)$ もそうなので、確率母関数を計算した方が分かりやすい。計算の仕方はほとんど同じ、結果も記号を置き換えるだけの式が得られる。

$$\begin{aligned} E(z^{Z(t)}) &= E(E(z^{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{N(t)}} \mid N(t))) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E(z^Y)^n \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = \exp(-\lambda t(1 - G_Y(z))) \end{aligned}$$

ただし、 $G_Y(z) = E(z^Y)$ とする。

練習 3.19 $Y_1, Y_2, \dots$ をベルヌイ分布としたとき、 $Z(t)$ がパラメータ λt のポワソン過程であることを証明し、その理由を考えなさい。

モーメント母関数を n 回微分して $\theta = 0$ を代入すると n 次モーメントが計算できる。

$$\frac{d}{d\theta} M_{Z(t)}(\theta) = \lambda t \left(\frac{d}{d\theta} M_Y(\theta) \right) \exp(-\lambda t(1 - M_Y(\theta)))$$

$\theta = 0$ を代入すると $E(Z(t)) = \lambda t E(Y)$ となり、これは $E(Z(t)) = E(N(t))E(Y)$ とも書けるので、さきに求めた結果と一致する。同様に、

$$\frac{d^2}{d\theta^2} M_{Z(t)}(\theta) = \left(\lambda t \left(\frac{d^2}{d\theta^2} M_Y(\theta) \right) + \left(\lambda t \frac{d}{d\theta} M_Y(\theta) \right)^2 \right) M_{Z(t)}(\theta)$$

となるので、2次モーメントは $\theta = 0$ を代入して $\lambda t E(Y^2) + (\lambda t E(Y))^2$ 、したがって、分散は

$$E(Z(t)^2) - (E(Z(t)))^2 = \lambda t E(Y^2)$$

分布を計算する場合は合成積を使う。 Y の累積分布関数を $H(x)$ とすると、 $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ の累積分布関数は $H(x)$ の n 重合成積 $H^{(*n)}(x)$ で表されるので、

$$P(Z(t) < z) = E(P(Z(t) < z \mid N(t))) = \sum_{n=0}^{\infty} H^{(*n)}(z) \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

例 3.12 ある機械装置は小故障によってランダムな劣化が起き、それらの累積がある閾値を超えると使えなくなる。劣化の量が独立同分布に従うとすれば、その装置が t 時間以上動き続ける確率は複合ポワソン過程によって計算することが出来る。 k 回目の小故障の劣化量を Y_k とする。装置の寿命（劣化の総量が a を初めて超えるとき）を T とすると、 $T > t$ は $Z(t) < a$ と同値。 $G(y)$ の n 重合成積を $G^{(*n)}(y)$ とすると

$$\begin{aligned} P(T > t) &= P(Z(t) < a) = E(P(Z(t) < a \mid N(t))) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} G^{(*n)}(a) \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

したがって、期待寿命は

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} G^{(*n)}(a)$$

特に、劣化の量がパラメータ μ の指数分布に従うとすれば、 $G^{(*n)}(y)$ はガンマ分布に従うので簡単な形になる。

$$\begin{aligned} G^{(*n)}(y) &= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\mu y)^k}{k!} e^{-\mu y} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\mu y)^k}{k!} e^{-\mu y} \\ E(T) &= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\mu a)^k}{k!} e^{-\mu a} = \frac{1}{\lambda} (1 + \mu a) \end{aligned}$$

例 3.13 インターネットにアクセスすると、ログファイルなど、少しずつパソコンのメモリにゴミが溜まって行く。1回のアクセスに対して付加されるゴミの量を X_k とする。 $X_1, X_2, \dots$ は互

いに独立、インターネットにアクセスするのはポワソン過程 $N(t)$ に従うとすれば、 t 時間後のゴミの総量は $X_1 + X_2 + \dots + X_{N(t)}$ という複合ポワソン過程になる。ゴミがある量 α を超えると動作が不安定になり、初期化しなければいけないとすると、その初期化を行うまでの時間を調べるためには

$$\min_t \{X_1 + X_2 + \dots + X_{N(t)} > \alpha\}$$

を知らなければいけない。

例 3.14 コンピュータウィルスがポワソン過程で到着し、ある時間 Y 経過するとほとんどは自然消滅するが、確率 p で致命的なエラーを引き起こす、という場合にも複合ポワソン過程による分析が可能。

練習 3.20 $\{N(t); t \geq 0\}$ はパラメータ λ のポワソン過程、 $Y_1, Y_2, \dots$ は $\{N(t); t \geq 0\}$ とは独立で、平均 μ 分散 σ^2 の独立同分布に従う確率変数の列とする。これらに対して新たな確率過程 $\{Z(t); t \geq 0\}$ を

$$Z(t) = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{N(t)}$$

によって定義する。このとき、 $Z(t)$ の平均と分散を求めなさい。

練習 3.21 ある生命保険会社には支払い請求が週平均 12 件の頻度で起き、そのうち実際に支払われるのは約 8 割で、1 件あたりの平均請求額は 1000 万円、標準偏差 400 万円だという。請求がポワソン過程で到着するとして、この会社の 1 週間の現金支払額の平均と分散を計算しなさい。

3.6 非定常（非斉時）ポワソン過程

ラッシュアワーの客の到着のように、到着率が時間的に変動するが、増分は独立、という場合、微小時間の増分に対して、次が成り立つことを仮定しても良い

$$P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h) \quad (3.20)$$

$\lambda(t)h$ は区間 $(t, t+h]$ の間の平均到着数、到着数を時間間隔で割れば到着率が求められるので、 $\lambda(t)$ は時刻 t における瞬間到着率とも言える。到着率が時々刻々変化するけれど、ある瞬間に事象が到着するかしないかということが過去の事象と独立であることは仮定されている。つまり、増分の独立性は仮定されているが、定常性の仮定が崩れている。定常性だけを外したこのような確率過程は非定常ポワソン過程(non-stationary Poisson process, non-homogeneous Poisson process) という。瞬間到着率 $\lambda(t)$ を時刻 t の関数と考えたとき、これを到着の強度関数(intensity function) という。

定義 3.4 $\lambda(t)$ を任意の非負関数とする。確率過程 $\{N(t); t \geq 0\}$ は次の仮定を満たすとき、強度関数 $\lambda(t)$ を持つ非定常ポワソン過程という

- (1) $N(0) = 0$
- (2) 独立増分性を持つ
- (3) $(t, t+h]$ の増分が次の規則に従う

$$\begin{aligned}
P(N(t+h) - N(t) = 0) &= 1 - \lambda(t)h + o(h) \\
P(N(t+h) - N(t) = 1) &= \lambda(t)h + o(h) \\
P(N(t+h) - N(t) \geq 2) &= o(h)
\end{aligned}$$

強度関数 $\lambda(t)$ の積分を $\Lambda(t)$ とすると

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(t) dt \quad (3.21)$$

非定常ポワソン過程の増分はポワソン分布にしたがう

$$P(N(s+t) - N(s) = k) = \frac{(\Lambda(s+t) - \Lambda(s))^k}{k!} e^{-(\Lambda(s+t) - \Lambda(s))}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.22)$$

$\lambda(t) = \lambda$ ならば $\Lambda(t) = \lambda t$ なので、定常なポワソン過程では、確かにこの式が成り立っていることが確かめられる。形はややこしいが、増分が独立であることを考えると、強度を積分すれば事象の平均到着数が得られるので、このような形になることは納得できる

3.6.1 非定常ポワソン過程のシミュレーション

成功する確率が $\lambda(t)\Delta t$ の連続ベルヌイ試行を行えばよいが、thinning algorithm と呼ばれるスマートな方法がある。

$$\lambda^* = \max_{0 \leq t \leq T} \lambda(t)$$

と置く。パラメータ λ^* のポワソン過程に従って到着する時点列を $t_1, t_2, \dots$ を作る（パラメータ λ^* の指数乱数を生成して、累積して行けばよい）。各 t_k に対して、一様乱数 u_k を生成し、 $u_k < \lambda(t_k)/\lambda^*$ ならば t_k を残し、さもなければ、 t_k を捨てる。残された時点列は強度関数 $\lambda(t)$ の非定常ポワソン過程に従うサンプルになっている。

ポワソン過程の事象をランダムに間引いてもポワソン過程になる、というランダム分解の性質があったが、この場合は時間によって間引く確率が変わると考えれば、もっともらしい。

3.7 再生過程 (renewal process)

事象の起きる間隔 $Y_1, Y_2, \dots$ が指数分布とは限らずに、独立同分布に従っている計数過程 $\{N(t), t \geq 0\}$ を再生過程という。 $N(t)$ は区間 $[0, t]$ で事象の起きる回数を表す。 n 回目の事象の起きる時刻を $T_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ とする。事象の到着間隔が独立同分布に従っているので、1 回目の事象の到着時点 T_1 からカウントを始めるような計数過程 $\{M(t), t \geq 0\}$ を次のように定義すると、元の確率過程と同じ確率規則に従う。

$$M(t) = N(t + T_1) - 1, \quad t \geq 0$$

つまり、最初の事象の到着時刻 T_1 で「再生 (リニューアル)」する、ということから再生過程という名前がある。 T_1 を再生点という。最初の事象の到着時刻とは限らず、事象が到着した時刻から先の事象の到着数を数えたものはもとの $\{N(t)\}$ と全く同じ確率挙動を示すので、すべての事象の到着時点は再生点となる。

$N(t)$ の分布を計算するためには、 n 回目の事象の起きる時刻を T_n とは次のような関係があることを利用する。

$$N(t) \geq n \iff T_n \leq t$$

Y_n の分布関数が与えられれば、 T_n はその合成積で計算でき、上の関係を使って $N(t)$ の分布が計算できる。

離散時間確率過程でも同様の定義が可能で、 $\{S_{n+T}, n = 0, 1, 2, \dots\}$ が $\{S_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ と同じ確率挙動する場合、 $\{S_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ は離散再生過程と呼ばれ、 T は再生点という。リニューアルは日本語としても良く使われる。

2 項過程の場合、事象が起きる点は言うまでもなく再生点になるが、到着間隔の無記憶性から、どんな時点でも再生点になる、という性質がある。どこでも再生する、という点で、かなり特殊な確率過程、ということになる。2 項過程を連続化したポワソン過程にも当然この性質は保存されている。任意の時点 T とすると、 $N(t+T) - N(T)$ は、時点 T から始めて長さ t の区間に到着する事象の個数で、それはパラメータ λt のポワソン分布に従うことが分かっている。したがって、ポワソン過程においては任意の時点が再生点になっている。

例 3.15 機械部品の取り替え回数を計数過程と考えると、取り替えた直後は前回の取り替え直後と同じ状況になると考えて良い。したがって、最初新品からスタートして、最初の取り替え時点を T としたとき、原点を T に移した計数過程 $\{N(t+T) - 1, t \geq 0\}$ は元の確率過程 $\{N(t), t \geq 0\}$ と同じ振る舞いをするので、 $\{N(t), t \geq 0\}$ は再生過程である。

練習 3.22 $\{S_n\}$ はパラメータ p の 2 項過程に従うものとします。 $n > 0, m > 0, 0 \leq j \leq k$ を満たす n, m, j, k に対して、 $P(S_{n+m} = k \mid S_m = j)$ を計算しなさい。この結果から何が分かりますか。

練習 3.23 $\{N(t), t \geq 0\}$ をパラメータ λ のポワソン過程とすると、 $\{N(t+s) - N(s), t \geq 0\}$ も同じパラメータ λ のポワソン過程になることを示しなさい。

ヒント 何を言えば示したことになりますか。定義をよく読み返しなさい。

演習問題

問題 3.1 $\{N(t); t \geq 0\}$ を斉時ポワソン過程とする。 $t, s > 0$ に対して、 $N(t)$ と $N(t+s)$ の積の期待値を求めなさい。

問題 3.2 ポワソン過程で $N(t) = n$ が与えられているとき、 $N(s) (s < t)$ の条件付き分布が 2 項分布に従うことを示しなさい。

ヒント 到着事象の一様性を使う

問題 3.3 ある装置は k 回のショックで破壊される。ショックはパラメータ λ のポワソン過程にしたがって生じる。破壊される迄の時間 T の密度関数を求めなさい。

問題 3.4 一年遠洋航海する船の機関に平均寿命が 1 年の部品が使われている。それがないと船が動かないという。部品の寿命は指数分布にしたがっているものとする。部品のスペアをいくつ持っていれば、独力で帰ってくる確率を 99% 以上にすることができますか。

問題 3.5 $X_1, X_2, \dots$ は独立にパラメータ λ の指数分布にしたがい、 M はそれらとは独立にパラメータ p の幾何分布にしたがうものとする。このとき、 $X_1 + X_2 + \dots + X_M$ はどのような分布

になりますか。

問題 3.6 パラメータがそれぞれ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ の互いに独立な指数分布にしたがう確率変数 X, Y, Z を考える。 $U = \min\{X, Z\}, V = \min\{Y, Z\}$ としたとき、以下の式を示しなさい。

$$P(U > u, V > v) = \exp(-\lambda_1 u - \lambda_2 v - \lambda_3 \max\{u, v\})$$

問題 3.7 (続き) U, V は互いに独立ですか。また、 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に適当な値を与えて、Mathematica あるいは Excel を使って U, V の結合密度関数の図を描きなさい。

問題 3.8 バスの到着間隔は 10 分から 20 分の間の一様分布に従うものとします。客は平均 2 分間隔でポワソン過程に従って到着するものとする、次のバスに乗り込む客の数はどれくらいですか。平均と標準偏差を計算しなさい。

ヒント バスの到着間隔で条件を付けるのでしょうか。バスの発車直後には誰もいないと仮定しましょう。

問題 3.9 複合ポワソン過程 $\{Z(t); t \geq 0\} + \{Y_n\}$ について、特に $Y_1, Y_2, \dots$ がベルヌイ分布に従うとすると、 $\{Z(t); t \geq 0\}$ はポワソン過程になることを示しなさい。ただし、ベルヌイ分布は以下で定義されるものとします。

$$P(Y = 1) = p, P(Y = 0) = 1 - p$$

問題 3.10 複合ポワソン過程 $\{Z(t); t \geq 0\} + \{Y_n\}$ のモーメント母関数を計算しなさい。ただし、 $Y_1, Y_2, \dots$ のモーメント母関数を $M_Y(\theta)$ とします。

問題 3.11 (続き) この結果を使って $Z(t)$ の平均と分散を求めなさい。

問題 3.12 (続き) この結果を使って問題 3.9 を証明しなさい。

問題 3.13 毎日発表される日経平均株価で、前日比で 2% 以上変化したときに事象が到着したと考えると計数過程を構成したとき、それがポワソン過程でモデル化できるかどうかを検証しなさい。データはインターネットから見つけてきなさい。

問題 3.14 大地震の発生を事象の到着として計数過程を考えると、それがポワソン過程でモデル化できるかどうかを検証しなさい。データはインターネットから見つけてきなさい。

4 ランダムウォークとブラウン運動

ベルヌイ試行で成功した回数を数えるだけでなく、失敗した回数との差を考えると、実り豊かな確率過程が得られる。金融工学の基礎理論としても重要なランダムウォークである。

4.1 ランダムウォーク

独立同分布する確率変数列 $X_1, X_2, \dots$ の部分和

$$\begin{aligned} S_n &= X_1 + X_2 + \dots + X_n = S_{n-1} + X_n, \quad n = 1, 2, \dots \\ S_0 &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

をランダムウォークという。特に、 $X_1, X_2, \dots$ が 2 値分布 (ベルヌイ分布) :

$$P(X = 1) = 1 - P(X = -1) = p \quad (4.2)$$

に従う場合を (狭義の) ランダムウォークという。ここでは、そのケースを扱う。株価のシミュレーションで分かるように、現実的なデータに対して、この単純なランダムウォークモデルを当てはめることが出来る場合も多い。例えば、将来の株価の動きにランダムウォークを仮定し、オプションの価格付けを行う研究がある。

ランダムウォークは離散時点の確率過程なので、サンプルパスは離散点の集合 $\{(k, S_k), k = 0, 1, 2, \dots\}$ となるが、 (k, S_k) を折れ線で結んだパスのこともサンプルパスという。

4.1.1 確率分布

S_n は n が偶数の時偶数の値を取り、 n が奇数の時奇数の値しか取れない、別の言葉で言えば、 $n - S_n$ は必ず偶数になる。 $S_{2n} = 2k$ となる確率は次のようにして計算できる。 $2n$ 回の推移のうち、 u 回は上へ ($X = +1$ の場合を、サンプルパスの動きに合わせてこのように表現する) 推移し、 d 回は下へ推移したとすると、 $S_{2n} = u - d$ となる。したがって、

$$2k = u - d, 2n = u + d$$

が成り立つ。これを u, d について解けば

$$u = n + k, d = n - k$$

が得られるので、それらを代入して結局次の式が得られる。

$$P(S_{2n} = 2k) = \binom{2n}{u} p^u (1-p)^d = \binom{2n}{n+k} p^{n+k} (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$$

奇数ステップの場合の確率規則も同様に計算可能。

$$P(S_{2n+1} = 2k+1) = \binom{2n+1}{n+k+1} p^{n+k+1} (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, -n-1$$

まとめると、次のように与えられる。

$$P(S_n = k) = \binom{n}{(n+k)/2} p^{(n+k)/2} (1-p)^{(n-k)/2}, \quad k = n, n-2, \dots, -n \quad (4.3)$$

$n+k$ は必ず偶数になることに注意。

練習 4.1 $P(S_{2n+1} = 2k + 1), P(S_n = k)$ が上の式で与えられることを確かめなさい。

X_1 の期待値と分散は

$$E(X_1) = 2p - 1, V(X_1) = 4p(1 - p)$$

なので、 S_n の期待値、分散は、独立変数の和の公式を使って、次の式で与えられる。

$$E(S_n) = n(2p - 1), V(S_n) = 4np(1 - p) \quad (4.4)$$

したがって、もし、 $p \neq 0.5$ ならば、1 回推移するごとに平均 $2p - 1$ ずつ原点から離れて行き、 $n \rightarrow \infty$ のとき、期待値は無限（あるいは - 無限大）に発散する。 $2p - 1$ のことをドリフトパラメータという。ドリフトパラメータが 0、すなわち $p = 0.5$ のとき、ランダムウォークは対称という。

これ以降、 $p = 0.5$ 、すなわち対称なランダムウォーク $\{S_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ に限定し、そこから導かれる興味のある量を求める。

練習 4.2 $p = 0.5$ のランダムウォーク $\{S_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ について、 S_n の確率関数と、その期待値、分散を計算しなさい。

4.2 対称なランダムウォーク

4.2.1 原点回帰

$S_{2n} = 0$ のとき、 $2n$ ステップ後に原点に回帰した、という言い方をすることがある。

$$P(S_{2n} = 0) = v_{2n} = \binom{2n}{n} p^n (1 - p)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

対称でない場合、例えば $p > 0.5$ とすると、 $E(S_n)$ は正の無限大に発散するので、いつまでも原点付近に止まり続けるわけにはいかない、したがって、原点に回帰する回数は有限に止まる。対称の場合でも、ステップを繰り返せば原点から大きく隔たった状態を取る可能性があるので、中には、そのまま原点に戻らないパスの存在が気になるが、実際にどうなっているのか、考えてみよう。以下では、 $p = 0.5$ を仮定する。

対称な場合、

$$P(S_{2n} = 0) = v_{2n} = \binom{2n}{n} 2^{-2n} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} = \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k}$$

となり、 $n \rightarrow \infty$ とすると、緩やかに 0 に近づいて行く。 n が大きいときの様子は、 n の階乗をスターリングの公式で近似することによって評価できる。

命題 4.1 (スターリングの公式) 正整数 n が十分に大きいとき、次の近似式が成り立つ。

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \quad (4.6)$$

実際、 $n!$ の対数を計算すると、

$$\sum_{k=1}^n \log k \approx \int_1^{n+0.5} \log x dx \approx (n+0.5) \log n - n = \log(n^n \sqrt{n} e^{-n})$$

となって、主要項が計算できる。 $\sqrt{2\pi}$ は近似の補正項と考えればよい。

スターリングの公式を使って、原点回帰の確率を書き直すと次の式が得られる。

$$v_{2n} \approx \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \quad (4.7)$$

したがって、原点に回帰する確率はそれほど小さくはない。

練習 4.3 n が大きいとき、スターリングの公式を用いて、 v_{2n} が上のように表されることを導きなさい。

後の議論のために、 $\{v_{2n}, n = 0, 1, 2, \dots\}$ の母関数を求めておく

命題 4.2 対称なランダムウォークの原点回帰確率の母関数は次の式で与えられる。

$$G_v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_{2n} z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \quad (4.8)$$

任意の実数 a に対し、 $(1+x)^a$ をテーラー展開すると

$$\begin{aligned} (1+x)^a &= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (a-k) x^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n \end{aligned} \quad (4.9)$$

となる。 a が正整数の場合は、 $\binom{a}{n}$ は $n > a$ の時ゼロになるが、さもなければ無限個の数が定義される。この $\binom{a}{n}$ は一般化二項係数と呼ばれる。 a が n 以上の正整数ならば通常の二項係数と一致することに注意する。 $G_v(z)$ の最右辺の式は、 a を $-\frac{1}{2}$ に、 x を $-z^2$ に置き換えたものに他ならない。

二項係数 $\binom{2n}{n}$ を書き換えて、 $G_v(z)$ の式の最後の等式を導く。 $(2n)!$ を偶数と奇数に分けて

$$(2n)! = \prod_{k=1}^n 2k \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = 2^n n! \times 2^n \prod_{k=0}^{n-1} \left(k + \frac{1}{2}\right)$$

と書き直すと、

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = 2^{2n} \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \left(k + \frac{1}{2}\right) = 2^{2n} \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - k\right)$$

したがって、

$$G_v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - k\right) (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-z^2)^n$$

が得られる。これで証明が終わる。■

母関数 $G_v(z)$ は次のような議論に使える： $S_{2n} = 0$ の時 1、さもなければ 0 という値を取る確率変数 $1_{\{S_{2n}=0\}}$ を考えると、

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{S_{2n}=0\}}$$

は全生涯で原点を訪問する回数を表す確率変数といえる。

$$E(1_{\{S_{2n}=0\}}) = v_{2n}$$

なので、 $\sum_n v_{2n}$ は原点の平均訪問回数という意味がある。 $\sum_n v_{2n}$ は母関数 $G_v(z)$ に $z = 1$ を代入すると得られるが、母関数の関数形から $G_v(1) = \infty$ である。これは原点の平均訪問回数が無限大であることを意味する。すなわち、対称なランダムウォークでは、全生涯に原点を訪問する回数の期待値が無限大になる、ということが分かった。これは、言い換えれば、原点から出発したパスはいつか必ず（確率 1 で）原点に戻ることが保証される、ということでもある。

練習 4.4 $(1 - z^2)^{-0.5}$ をテーラー展開したものを書き直すと、 $(-z^2)^n$ の係数が v_{2n} 、すなわち対称なランダムウォークの原点回帰確率に等しくなることを確かめなさい。

4.2.2 鏡像の原理

対称なランダムウォークの場合、ある事象の確率を計算することは、条件を満たすサンプルパスの本数を数えることと同じである。その計算に威力を発揮する、次のような命題がある。

命題 4.3 (鏡像原理) $km > 0$ となる整数 k, m に対して、 $(0, k)$ から (n, m) へ至るランダムウォークのパスのうちで、 x 軸を訪問するパスの本数は、 $(0, -k)$ から (n, m) へ至るランダムウォークのパスの本数

$$\binom{n}{(n+k+m)/2}$$

に等しい。

なぜならば、最初に原点を訪問するのが j 回目の推移だったとすると、 $(0, k)$ から $(j, 0)$ へ至るパスを x 軸に対称な位置に置き換えると、 $(0, k)$ から (n, m) までのパスは $(0, -k)$ から (n, m) までのパスになる。逆に $(0, -k)$ から (n, m) へ至るパスのうち、最初に x 軸を訪問する時点までを x 軸に対称な位置に置き換えると、 $(0, -k)$ から (n, m) へ至るパスは $(0, k)$ から (n, m) へ至るパスで x 軸を訪問するパスになる。したがって、 $(0, k)$ から (n, m) へ至るランダムウォークのパスで x 軸を訪問するパスの本数は、 $(0, -k)$ から (n, m) へ至るランダムウォークのパスと一対一に対応しているからである。

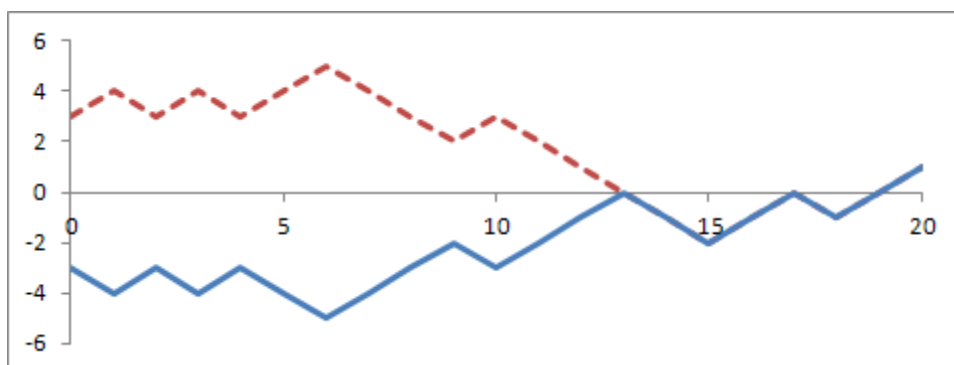


図 6 ランダムウォークの鏡像原理

x 軸に沿って鏡を立て、 $(0, k)$ から x 軸に到達するまでのパスを鏡に映った像と考えれば、一対対応が直感的に理解できる。その意味で、この命題は「鏡像」の原理と呼ばれる。

練習 4.5 $(0, -k)$ から (n, m) へ至るランダムウォークのパスの本数が

$$\binom{n}{(n+k+m)/2}$$

で与えられることを導きなさい。

4.2.3 初到達確率

時点 0 で原点から出発し、時点 n で初めて状態 $s(> 0)$ に到達する確率 $\phi_s(n)$ を計算する。ただし、 $n+s$ は偶数になるような s について考える。ステップ毎に場合分けして、条件を満たすパスの本数を数える、と考えるのが普通のやりかただが、鏡像の原理(とアタマ)を使うと、簡単に解ける。時点 n で初めて状態 s に到達するためには、時点 $n-1$ では状態 $s-1$ にいなければいけない。 $(0, 0)$ から $(n-1, s-1)$ へ至るパスで、状態 s を訪問しないパスの本数は、 $(0, 0)$ から $(n-1, s-1)$ へ至るすべてのパスから、状態 s を訪問するパスを引いたものの本数に等しい。 $(0, 0)$ から $(n-1, s-1)$ へ至るパスの本数は

$$\binom{n-1}{(n+s)/2-1}$$

その内、状態 s を訪問するパスは、鏡像の原理を適用すると、 $(0, 2s)$ から $(n-1, s-1)$ へ至るパスの本数に等しく、

$$\binom{n-1}{(n+s)/2}$$

となる。したがって、時点 n で初めて状態 s に到達する確率は

$$\phi_s(n) = \left(\binom{n-1}{(n+s)/2-1} - \binom{n-1}{(n+s)/2} \right) 2^{-n} = \frac{s}{n} \binom{n}{(n+s)/2} 2^{-n} \quad (4.10)$$

に等しい。

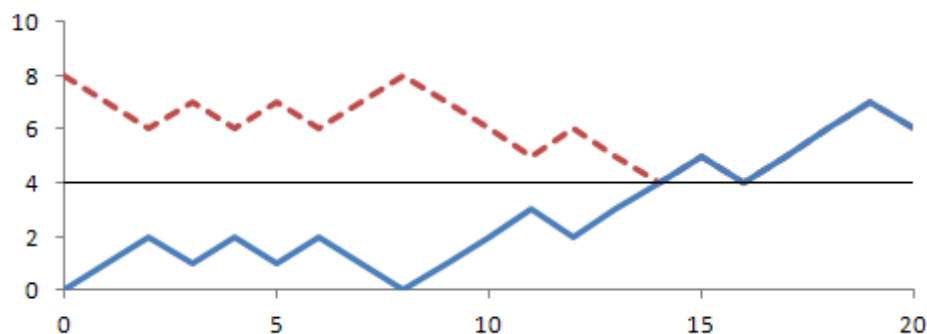


図 7 ランダムウォークの初到達時刻

再生過程的な議論を適用すると、状態 s へ到達するためにはまず、状態 1 へ到達しなければいけない、状態 1 へ到達したら、推移が独立なことから、そこを改めて原点と考えても良く、そこから状態 $s-1$ へ到達するには、という問題に置き換わる。したがって、初めて状態 1 へ到達した時点で条件を付けた全確率の公式を使って、次のような再帰式が得られる。

$$\phi_s(n) = \sum_{m=1}^{n-s+1} \phi_1(m) \phi_{s-1}(n-m)$$

4.2.4 タブー確率

逆に、状態 s を訪問しない確率を計算してみよう。このようにある条件を満たさない確率のことを一般にタブー確率という。 $(0,0)$ から (n,k) へ至るランダムウォークの中で、状態 $s(>k)$ を訪問しない確率 $r_{s,k}(n)$ はいくつか、という問題である。ただし、 $n+k$ は偶数となる k のみを考える。この場合も、上の問題と同じように、訪問するパスを数える方が簡単。 $(0,0)$ から (n,k) へ至るパスの本数は

$$\binom{n}{(n+k)/2}$$

その内、状態 s を訪問するパスは、鏡像の原理を適用すると、 $(0,2s)$ から (n,k) へ至るパスの本数に等しく、

$$\binom{n}{(n+k-2s)/2} = \binom{n}{(n+2s-k)/2}$$

となる。したがって、 $(0,0)$ から (n,k) へ至るランダムウォーク ($k < s$) の中で、状態 s を訪問しない確率は

$$r_{s,k}(n) = \left(\binom{n}{(n+k)/2} - \binom{n}{(n+2s-k)/2} \right) 2^{-n}$$

に等しい。

4.2.5 原点回帰、その2

原点に初めて戻る時刻を T としたとき、 T の確率関数を求めたい。 T の取り得る値は偶数のみであることに注意。 $P(T=2n)$ を f_{2n} と記すと、 f_{2n} は、初到達確率を利用して簡単に計算できる。最初の推移では $(1,1)$ か $(1,-1)$ へ推移するが、 $(1,-1)$ を通って、初めて $2n$ で原点回帰する確率は、 $(1,-1)$ を原点と考えると、 $2n-1$ で初めて状態 1 を訪問する確率 $\phi_1(2n-1)$ と等しい。符号をひっくり返して考えると、 $(1,1)$ を通る場合も同じ。したがって、全確率の公式を使って、以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} f_{2n} &= \frac{1}{2} (\phi_1(2n-1) + \phi_{-1}(2n-1)) = \phi_1(2n-1) = \frac{1}{2n-1} \binom{2n-1}{n} 2^{-2n+1} \\ &= \frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1} 2^{-2n} \end{aligned} \quad (4.11)$$

あまり見通しが良くないので、 n が大きい場合にスターリングの公式を使って近似式を計算してみる

$$f_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{n!n!} \frac{1}{(2n-1)} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{1}{2n-1}$$

n を大きくすると、 $n^{-3/2}$ の早さ (遅さ) で減少する。 $G_v(z)$ の議論から、確率 1 で $T < \infty$ ということが分かっているのに、その期待値を計算すると無限大になる。

近似をしないできちんと計算しようとすると、母関数が必要になる。原点への回帰を再生と考える。 $2n$ 回推移後に原点に戻っているとすれば、 $2n$ 回の間に必ず 1 回は原点に戻る。その時点 $2m$ とすれば、時点 $2m$ で新たなランダムウォークが始まる (再生する) と考えても良いので、次の式が成り立つ。 v_{2n} は $2n$ 回推移後に原点に戻る確率だったことを思いだそう。

$$v_{2n} = \sum_{m=1}^n f_{2m} v_{2n-2m} \quad (4.12)$$

ここで、 $\{f_{2k}\}, \{v_{2k}\}$ の確率母関数をそれぞれ $H(z), G(z)$ とする。 $G(z)$ はすでに求めてある。

$$H(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k} z^{2k}, G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v_{2k} z^{2k} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

和の下限の値に注意。式 (4.12) の両辺に z^{2n} を掛けて、 $n = 1, 2, \dots$ について和をとれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_{2n} z^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n v_{2n-2k} f_{2k} \right) z^{2n}$$

母関数を使って整理すると

$$\text{左辺} = G(z) - 1$$

$$\text{左辺} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k} z^{2k} \sum_{n=k}^{\infty} v_{2n-2k} z^{2n-2k} = H(z)G(z)$$

したがって、

$$H(z) = 1 - \frac{1}{G(z)} = 1 - \sqrt{1-z^2} \quad (4.13)$$

が得られる。

念のため、 f_{2k} をもとめるためには、これを z の多項式に直して、その係数を見ればよい。一般化 2 項係数を使って展開すると、

$$\begin{aligned} H(z) &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-z^2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \binom{1/2}{n} z^{2n} \\ &= \frac{1}{2} z^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{2^n n!} z^{2n} \end{aligned}$$

ただし、 $n!!$ は一つおきに取り出した数の掛け算： $n(n-2)(n-4)\dots$ を表す。この式変形は次のようにして導かれる：

$$\begin{aligned} (-1)^{n-1} \binom{1/2}{n} &= (-1)^{n-1} \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}-1\right) \left(\frac{1}{2}-2\right) \dots \left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} \\ &= \frac{1}{2^n} \frac{(2n-3)(2n-5)\dots 1}{n!} \\ &= \frac{1}{2^n} \frac{(2n-3)!!}{n!}, \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

したがって

$$P(T = 2n) = f_{2n} = \frac{(2n-3)!!}{2^n n!} = \frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1} 2^{-2n} \quad (4.14)$$

これは、先に求めた結果と一致している。

母関数の性質から、初めて原点回帰するまでの時間 T の期待値は、母関数を微分して

$$H'(z) = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$$

$z = 1$ とすればよい。その結果は無限大となる。一方、 $H(1) = P(T < \infty) = 1$ なので、有限時間内に原点回帰する確率は 1、つまり、必ずいつかは原点に帰ることが保証されているが、それまでの時間の期待値が無限大になるという、奇妙な性質がある。このような性質はゼロ再帰的と呼ばれる。

逆に、 $2n$ 回の推移で 1 回も原点に戻らない確率 r_{2n} はタブー確率 $r_{s,k}(n)$ を使って計算できる。最初の推移では $(1, 1)$ か $(1, -1)$ へ推移するが、その後はどちらへ推移した場合も同じなので、全確率の法則から、片方の計算をすればよい。 $(1, 1)$ から $(2n, 2k)$ へ至るパスの内、 x 軸を訪問しないパスの本数は $r_{s,k}(n)$ の計算の場合と同じで

$$\binom{2n-1}{n+k-1} - \binom{2n-1}{n-1-k} = \binom{2n-1}{n+k-1} - \binom{2n-1}{n+k}$$

これを $k = 1, 2, \dots$ について全部足したものが条件を満たすパスの本数になる。したがって、 $2n$ 回の推移で 1 回も原点に戻らない確率は次の式で与えられる。

$$r_{2n} = 2 \binom{2n-1}{n} 2^{-2n} = \binom{2n}{n} 2^{-2n} = v_{2n}$$

練習 4.6 $2n$ 回推移の間、負にならない確率は、 $2n$ 回目で原点を訪問する確率 v_{2n} と等しいことを証明しなさい。

ヒント $2n$ 回後に状態に関して全確率の公式を適用することを考えなさい。

4.2.6 逆正弦法則

Excel の実験で、ほとんど原点に戻らないサンプルパス（勝敗で言えばワンサイド、どちらかが常に勝ち越している）がかなり多く見られた。直感的には相容れないようだが、確率を計算してみると確かにそうなる。意外で、ランダムウォークに関して最も美しい結果の一つである。

サンプルパスの点と点を結ぶ線分に注目し、それが x 軸より上にある場合、ランダムウォークは正の領域にあるということにする。

補題 8 長さ $2n$ のランダムウォークで、 $2m$ が正の領域に、 $2n - 2m$ が負の領域にある確率 $p_m(n)$ は

$$p_m(n) = v_{2m} v_{2n-2m} \quad (4.15)$$

で与えられる。

$2n$ 回の推移の間に正の領域にある確率、というだけで、 $2n$ 回推移後に S_{2n} がどの状態にいるかは問題にしていないことに注意する。にもかかわらず、 v_{2m} という原点回帰の確率を組み合わせで計算できるという不思議な命題である。

証明は n と m に関する二重の数学的帰納法による。任意に n を一つ固定したときにすべての m に対して成り立つことを帰納法によって証明する。長さ 2 のランダムウォークのサンプルパスを数えれば $p_0(1) = P_1(1) = \frac{1}{2}$ が分かるが、 $v_2 = \frac{1}{2}$ であることから、 $n = 1, m \leq n$ に対しては成り立つ。

$p_0(n) = p_n(n) = v_{2n}$ なることを示すためには、タブー確率を利用する。 $2n$ ステップの間に負の領域だけで推移するランダムウォークのサンプルパスの本数は、原点から出発して、 $2n$ 後に $2k = (0, -2, -4, \dots)$ にあり、その間一度も状態 1 を訪問しないパスの本数と等しい。

$(0, 0)$ から $(2n, 2k) (k = 0, -2, -4, \dots)$ へ推移するランダムウォークで、その間一度も状態 1 を訪問しないパスの本数は、タブー確率 $r_{1,2k}(2n)$ に 2^{2n} を掛けたものに等しいので

$$\binom{2n}{n+k} - \binom{2n}{n+1-k} = \binom{2n}{n+k} - \binom{2n}{n+k-1}, \quad k = 0, -1, -2, \dots$$

と表される。 $k = 0, -1, -2, \dots$ を全部足すと、 $\binom{2n}{n}$ だけが残し、これに 2^{-2n} を掛けたものは v_{2n} に等しい。したがって、 $p_0(n) = v_{2n}$ が言えた。 $p_n(n) = v_{2n}$ も符号をひっくり返せば同じように証明できる。これで帰納法の最初のステップが終わり。

初めて原点回帰する時点で全体を層別し、全確率の公式を適用する。 $m > 0$ ならば、必ず一度は原点を訪問するので、最初に原点を訪問する時点で層別して計算する。最初に原点を訪問する時点をも $2i$ とすると、もし、 $2i$ まで正の領域にあったとすると（その確率は 2 分の 1）、残りの $2n - 2i$ ステップのうち、 $2m - 2i$ を正の領域で過ごすことになる。一方、 $2i$ まで負の領域にあったとすると、残りの $2n - 2i$ ステップのうち、 $2m$ を正の領域で過ごすことになる。たとえば、 $2n - 2i$ ステップの内 $2m - 2i$ を正の領域で過ごす確率は帰納法の仮定により $v_{2(m-i)}v_{2(n-m)}$ のように求められるので、結局次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} p_m(n) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m f_{2i} p_{m-i}(n-i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-m} f_{2i} p_m(n-i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m f_{2i} v_{2(m-i)} v_{2(n-m)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-m} f_{2i} v_{2m} v_{2(n-m-i)} \\ &= \frac{1}{2} v_{2m} v_{2(n-m)} + \frac{1}{2} v_{2(n-m)} v_{2m} = v_{2m} v_{2(n-m)} \end{aligned}$$

2 番目の等号は帰納法の仮定から、3 番目の等号は

$$\sum_{i=1}^m f_{2i} v_{2(m-i)} = v_{2m}, \quad \sum_{i=1}^{n-m} f_{2i} v_{2(n-m-i)} = v_{2(n-m)}$$

という関係を使っている。証明終わり。

これだけでは見通しが悪いので、 $n \gg 1$ の場合を考える。スターリングの公式を使うと

$$\binom{2n}{n} \approx \frac{\sqrt{4\pi n} (2n)^{2n} e^{-2n}}{2\pi \times n^{2n+1} e^{-2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} 2^{2n} \quad (4.16)$$

これを $\binom{2m}{m}, \binom{2n-2m}{n-m}$ に代入する

$$p_m(n) = v_{2m} v_{2n-2m} = \binom{2m}{m} \binom{2n-2m}{n-m} 2^{-2n} \approx \frac{1}{\pi \sqrt{m(n-m)}}$$

区間 $[0, 1]$ の間に無限回のランダムウォークをすると考えて、 m/n の比率がどうなるかを考える。 $\frac{m}{n} < a < \frac{m+1}{n}$ を満たす m を m^* と記すと、正の領域にある割合が a 以下の確率は、次のように表される。

$$\sum_{m \leq m^*} p_m(n) = \frac{1}{\pi} \sum_{m \leq m^*} \frac{1}{\sqrt{\frac{m}{n}(1 - \frac{m}{n})}} \frac{1}{n} \approx \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{a} \quad (4.17)$$

命題 4.4 (逆正弦法則) 十分長いランダムウォークにおいて、正の領域に留まる相対頻度が x 以下の確率は

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$$

で与えられる。

正の領域に留まる相対頻度の密度関数

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$

のグラフは次のようになる。 $x = 0.5$ に関して対称で凸関数、 $x = 0.5$ で最小値を取り、 $x = 0, x = 1$ に漸近する。

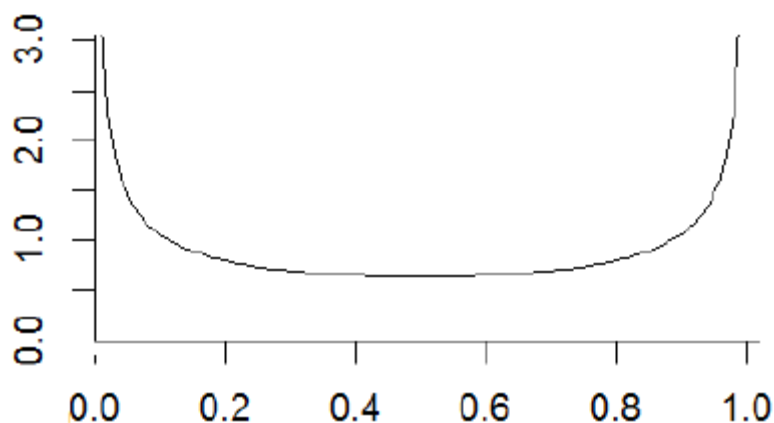


図 8 ランダムウォークの逆正弦法則

ランダムウォークを公平な賭けを無数に繰り返したときの所持金の推移と考えると、正の領域に留まる相対度数が 1 あるいは 0 に近いということは、勝負が一方的ということ意味着。公平な賭けでありながら、勝負の途中一方はずっと負け越しているということがむしろ普通、ということであり、お互いに勝ったり負けたり、というようなケース、すなわちサンプルパスは x 軸の周りに均等にばらついていることが多いだろうという「直感」はまったくあてにならない、ということがわかった。

4.2.7 最後の原点訪問からの長さ

勝ち越している比率ではなく、連続して勝ち越している長さについて考える。 $2n$ 回の推移で、最後に原点を訪問したのが $2m$ 回目、したがって最近 $2n - 2m$ 回は原点に回帰していない、とい

う確率は、 $2m$ 回目に原点に回帰する確率と、 $2n - 2m$ 回の間に原点に戻らない確率の積で与えられる。前者は v_{2m} 、後者は r_{2n-2m} だが、 $r_{2n-2m} = v_{2n-2m}$ であることが分かっているので、

$$v_{2m}v_{2n-2m}$$

に等しい。これは $p_m(n)$ 、つまり、 n 回のうち回が正の領域にある確率と同じ。ということは、最後に原点を訪問した時点の相対位置は逆正弦法則に従い、上のグラフで与えられる。

したがって、 $2n$ 回一度もタイにならない確率とちょうど $2n$ 回後にタイになる確率が同じで、最大になる、ということの意味する。これもかなり直感とずれている。

練習 4.7 コインを投げて表が出たら 1、さもなければ -1 ということを $n(=100)$ 回繰り返してその累積和を計算し、累積和が最後に 0 となる時点を記録する(一度も 0 にならなければ 0 を記録)という試行を 1000 回繰り返し、記録した数字のヒストグラムを描きなさい。Excel だと大変、R または Mathematica を使いなさい(R ならば、コイン投げは「`sample(c(-1,1),n,replace=T)`」、累積和は「`cumsum`」関数を使う。最後に 0 となる時点を知るには `which` 関数を使う)。

練習 4.8 $2n$ 回勝負して、途中、勝ち数が常に負け数を上回っていないながら最後に引き分けで終わる確率 w_{2n} が次の式で与えられることを証明しなさい。

$$w_{2n} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{4n} v_{2n-2}$$

(ヒント) 条件に当てはまるパスは、点 $(1, 1)$ から点 $(2n-1, 1)$ を経由し、時点 2 から時点 $2n-2$ までは 0 という状態を取ることはできません。状態 0 を通るパスの本数は鏡像の原理によって数えることが出来ませんか。

練習 4.9 $2n$ 回勝負して、途中、負け越さずに最後に引き分けで終わる確率が $4w_{2n+2}$ で与えられることを説明しなさい。

練習 4.10 $2n$ 回勝負して最終結果は引き分けだったとき、途中正の領域にある比率が m/n である(条件付き)確率は、 $m = 0, 1, \dots, n$ で一定であることを証明しなさい。したがって、たとえば、すべて正の領域で勝負を終える確率は $\frac{1}{n+1}$ で与えられます。

(ヒント) $p_m(n)$ と同じように考えればよい。最終結果は引き分けで、途中正の領域にある比率が m/n である確率を $q_m(n)$ と記すことにすると、最初に状態 0 に戻る時点で分類した全確率の公式を適用した $q_m(n)$ に関する漸化式を導くことが出来るはず。あとは数学的帰納法。

4.3 非対称なランダムウォーク

非対称なランダムウォークの場合、鏡像原理が適用できないために、簡単な分析ができない。そこで、「空間を歪ませる」ことで非対称なランダムウォークを対称なランダムウォークに変換し、対称なランダムウォークの結果が利用できるようにする、という技法が有効に使われる。

4.3.1 測度変換

密度関数 $f_X(x)$ を持つ確率変数 X とある関数 $g(x)$ に対して、 $g(X)$ の期待値は

$$\sum_x g(x)f_X(x)$$

と表されるが、その計算が困難な場合、測度変換と呼ばれる次のような方法が考えられる。 X とは別の確率変数 Y でその密度関数 $f_Y(x)$ が、「 $f_X(x) \neq 0$ ならば $f_Y(x) \neq 0$ 」という性質を持っていたとすると

$$\sum_x g(x)f_X(x) = \sum_x g(x)\frac{f_X(x)}{f_Y(x)}f_Y(x) \equiv \sum_x g(x)L(x)f_Y(x) \quad (4.18)$$

と書き換えることによって、 $g(X)$ の期待値は $g(Y)\frac{f_X(Y)}{f_Y(Y)}$ の (Y に関する) 期待値と言うこともできる。 X に関する期待値を $E_X(\cdot)$ 、 Y に関する期待値を $E_Y(\cdot)$ と記すと、

$$E_X(g(X)) = E_Y\left(g(Y)\frac{f_X(Y)}{f_Y(Y)}\right) \equiv E_Y(g(Y)L(Y)) \quad (4.19)$$

と書き換えることができる。このように、確率分布を別のものに置き換える方法を、測度変換という。 $L(x)$ は尤度関数という。確率分布を変えるということは、事象の確率が変わるということで、その補正として尤度関数が用いられる。確率分布を変えるということは、いわば、標本空間を歪めるといってもよく、そうすることによって見通しの良い形がみえてくることがあるかもしれない、ということを期待する。

特に $g(x)$ として、事象 A が起きれば 1、さもなければ 0 という定義関数 1_A を取れば、

$$E_X(1_A) = E_Y(1_AL(Y)) = E_Y\left(1_A\frac{f_X(Y)}{f_Y(Y)}\right)$$

となるが、 $E_Y(1_AL(Y))$ は事象 A の関数なので、それを $\varpi(A)$ と記すと、

$$\varpi(A) \equiv E_Y(1_AL(Y)) \quad (4.20)$$

$\varpi(A)$ は確率のような性質を持っている。実際、確率の 3 公理が成り立つことを次のようにして示すことができる。まず、

$$0 \leq E_Y(1_AL(Y)) \leq E_Y(L(Y)) = \sum_x \frac{f_X(x)}{f_Y(x)}f_Y(x) = \sum_x f_X(x) = 1$$

なので、0 以上 1 以下になる。次に、

$$\varpi(\Omega) = E(1_\Omega L(Y)) = E(L(Y)) = 1 \quad (4.21)$$

また、 A, B を互いに排反な事象とすると、 $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B$ なので、

$$\begin{aligned} \varpi(A \cup B) &= E(1_{A \cup B} L(Y)) = E((1_A + 1_B)L(Y)) \\ &= E(1_AL(Y)) + E(1_BL(Y)) = \varpi(A) + \varpi(B) \end{aligned} \quad (4.22)$$

が成り立つからである。そこで、 $\varpi(A)$ を確率らしく、

$$\varpi(A) = \tilde{P}(A) \equiv E_Y(1_AL(Y)) \quad (4.23)$$

と書こう。

例 4.1 例え

$$f_X(1) = p = 1 - f_X(-1) \Leftrightarrow f_X(x) = p \frac{x+1}{2} + (1-p) \frac{1-x}{2}, \quad x = -1, 1$$

という確率関数を持つ確率変数 X に対して、定数 $\tilde{p}(0 < \tilde{p} < 1)$ をとって

$$f_Y(x) = \tilde{p} \frac{x+1}{2} + (1-\tilde{p}) \frac{1-x}{2}, \quad x = -1, 1$$

によって確率変数 Y を定義すると、

$$L(x) = \frac{p(x+1) + (1-p)(1-x)}{\tilde{p}(x+1) + (1-\tilde{p})(1-x)}$$

となる。たとえば、事象として $A = \{X = 1\}$ とすると、

$$\tilde{P}(X = 1) = E(\mathbf{1}_A L(Y)) = \frac{p}{\tilde{p}} \times \tilde{p} = p = P(X = 1) \quad (4.24)$$

となり、測度変換後の期待値が変わらないことが分かる。

4.3.2 指数変換法

測度変換でよく使われるのは、モーメント母関数 $M_Y(\theta) = E(e^{\theta Y})$ を利用して、次のように書き換える指数変換法 exponential tilting である。

$$f_Y(x) = \frac{1}{M_X(\theta)} e^{\theta x} f_X(x) \quad (4.25)$$

$\{X_1, X_2, \dots\}$ は非対称なランダムウォークで $f_X(x)$ を使った積分の計算が難しいという場合、それを対称なランダムウォーク $\{U_1, U_2, \dots\}$ に置き換えて計算する場合を想定する。

$$P(X = 1) = p = 1 - P(X = -1) \quad (4.26)$$

$$P(U = 1) = P(U = -1) = 0.5 \quad (4.27)$$

$$M_X(\theta) = pe^{\theta} + (1-p)e^{-\theta} \quad (4.28)$$

なので、

$$f_U(1) = \frac{1}{M_X(\theta)} e^{\theta} f_X(1) = \frac{pe^{\theta}}{pe^{\theta} + (1-p)e^{-\theta}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{\theta} = \sqrt{\frac{1-p}{p}} \quad (4.29)$$

とすれば良いことが分かる。このとき、

$$M_X(\theta) = 2pe^{\theta} = 2\sqrt{p(1-p)}$$

である。

ランダムウォークに、この測度変換を適用する。一般のランダムウォーク

$$S_n = S_{n-1} + X_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad P(X_i = 1) = p = 1 - P(X_i = -1)$$

に対して、対称なランダムウォークを

$$Z_n = Z_{n-1} + U_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad P(U_i = 1) = P(U_i = -1) = 0.5$$

と置く。モーメント母関数を利用した測度変換では、尤度関数は

$$L(x) = \frac{f_X(x)}{f_U(x)} \Rightarrow L(\{u_{1:n}\}) = \frac{(M_X(\theta))^n}{e^{\theta z_n}} = \frac{(2\sqrt{p(1-p)})^n}{e^{\theta z_n}} \quad (4.30)$$

となる。ただし、 $u_{1:n}$ は $\{u_1, \dots, u_n\}$ を表す。

$g(x)$ として、事象 A の定義関数 1_A とし、事象 A を観測できる十分な長さの時間を n とすれば、

$$P(A) \equiv E_U(1_A L(Z_n))$$

によって、非対称なランダムウォークで起きる事象 A の確率を対称なランダムウォークで同じ事象の起きる確率を利用して、計算することが出来る。

例 4.2 非対称なランダムウォークで原点から出発して $2n$ ステップ後に原点に戻る確率を計算したい場合、上の方法を適用すると、 $Z_{2n} = 0, e^{\theta Z_{2n}} = 1$ であることを使うと、

$$\begin{aligned} P_X(S_{2n} = 0 \mid S_0 = 0) &= \left(2\sqrt{p(1-p)}\right)^{2n} P_U(Z_{2n} = 0 \mid Z_0 = 0) \\ &= 2^{2n} (p(1-p))^n \times \binom{2n}{n} 2^{-2n} \\ &= \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n \end{aligned}$$

となる。これは、通常の方法で計算した非対称なランダムウォークの結果

$$v_{2n} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$$

と一致する。

練習 4.11 非対称なランダムウォークで、原点から出発して n ステップ後に初めて状態 s を訪問する確率を計算しなさい。

測度変換の方法は、例えば、シミュレーションでも有効に使われる。たとえば、 X を株価として $X < a$ となったときだけ倒産すると考える。倒産の事象を A とすると、事象 A の定義関数 $1_A = g(X)$ の期待値 $\theta = P(A)$ をシミュレーションで求めたいとき、 X に従う乱数 $x_1, x_2, \dots$ を使って

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i)$$

によって推定できるが、ほとんどの場合 $g(x_i) = 0$ となつて、 θ を正確に推定することはむづかしい。このとき、株価の動きをゆがめて、倒産しやすい (a 以下の値が出やすいような) 環境 (確率分布 $f_Y(x)$) を作り出す測度変換を適用し、 $f_Y(x)$ にしたがう乱数 $y_1, y_2, \dots$ を使って

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(y_i) L(y_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(y_i) \frac{f_X(y_i)}{f_Y(y_i)} \quad (4.31)$$

を求めれば、それが θ の不偏推定量になる。この測度変換を利用したシミュレーション (モンテカルロ法) は重点抽出法 importance sampling method と呼ばれる。

例 4.3 株価が平均 μ 、分散 σ^2 の正規分布に従っているとして、倒産レベルを $a = \mu - 3\sigma$ としたとき、これをシミュレーションによって推定することを考える。平均 μ 、分散 σ^2 の正規乱数を n 個生成して、 a より小さいものの相対度数を求めれば良いのだが、ほとんどの乱数は a より大きいので、 n が小さいと推定値は 0 とか $1/n, 2/n$ のような結果になり、精度の良い推定は望めない。そこで、指数変換を考える。 X を平均 μ 、分散 σ^2 の正規分布に従う確率変数とすると

$$M_X(\theta) = \exp\left(\mu\theta + \frac{\sigma^2}{2}\theta^2\right) \quad (4.32)$$

$$f_Y(x) = \frac{1}{M_X(\theta)} e^{\theta x} f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(x-\mu-\sigma^2\theta)^2/(2\sigma^2)} \quad (4.33)$$

となる。これは平均 $\mu + \sigma^2\theta$ 、分散 σ^2 の正規分布の密度関数に他ならない。つまり、この指数変換は、分散を変えずに平均だけを $\sigma^2\theta$ だけずらす効果がある。例えば、 $\theta = -3/\sigma$ という変数変換を考えると、尤度関数は次のようになる。

$$L(x) = e^{3x/\sigma} M_X(-3/\sigma) = e^{3(x-\mu)/\sigma+4.5}$$

Y は平均 $\mu - 3\sigma$ 、分散 σ^2 の正規分布に従うので、 $f_Y(x)$ に従う乱数 y を生成すると、半分は $\mu - 3\sigma$ より小さい値が得られるので、 $g(y)$ の半分は 1 となり、それに $L(y)$ のウェイトを掛ければ、 $\sum_{i=1}^n g(y_i)L(y_i)$ はそれなりの値が得られることが期待できる。

そこで、平均 $\mu - 3\sigma$ 、分散 σ^2 の正規乱数 $y_1, y_2, \dots, y_n$ を生成し、

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(y_i)L(y_i) = \frac{1}{n} \sum_{y_i < \mu-3\sigma} L(y_i)$$

を計算すれば、倒産確率が推定できる。

4.3.3 原点を訪問しない確率（タブー確率）

状態 $i(>0)$ から出発し、時点 n で状態 $k(>0)$ に到達する間、一度も原点を訪問しない確率（タブー確率）

$$P(S_n = k, \min S_{1:n} > 0 \mid S_0 = i) = P(S_n = k - i, \min S_{1:n} > -i \mid S_0 = 0)$$

を計算したい。ただし、 $\min S_{1:n}$ は $\min \{S_1, \dots, S_n\}$ を表す。

対称でない場合にまともに考えるのは大変なので、対称なランダムウォークで計算した結果を変換して使う。 $p = 0.5$ ならば、鏡像原理を使って計算できる。実際、上の問題は、等号の右辺に書き換えたことにより、原点から出発して、状態 $-i$ を訪問することなく、時点 n で状態 $k-i$ を訪問する確率と読み替えることができるので、式 (??) から $r_{-i, k-i}(n)$ に等しい。したがって、

$$\begin{aligned} P(Z_n = k, \min Z_{1:n} > 0 \mid Z_0 = i) \\ &= \left(\binom{n}{(n+k-i)/2} - \binom{n}{(n-k-i)/2} \right) 2^{-n} \\ &= \left(m_{k-i}^{(n)} - m_{k+i}^{(n)} \right) 2^{-n} \end{aligned}$$

であることは分かっている。ここで、 $\binom{n}{(n+j)/2}$ を $m_j^{(n)}$ と置いた。また、 $\min Z_{1:n}$ は $\min S_{1:n}$ と同じような記法とする。 $p \neq 0.5$ の場合は、式 (4.30) の尤度関数 $L(z_n)$ を使って計算する。

$S_n = Z_n = k, S_0 = Z_0 = i$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned}
 P(S_n = k, \min S_{1:n} > 0 \mid S_0 = i) &= P(S_n = k - i, \min S_{1:n} > -i \mid S_0 = 0) \\
 &= E(1_A L(Z_n) \mid Z_0 = 0) \\
 &= P(Z_n = k - i, \min Z_{1:n} > -i \mid Z_0 = 0) e^{-\theta(k-i)} (M_U(\theta))^n \\
 &= \left(m_{k-i}^{(n)} - m_{k+i}^{(n)} \right) 2^{-n} \left(2\sqrt{p(1-p)} \right)^n \left(\frac{p}{1-p} \right)^{(k-i)/2} \\
 &= \left(m_{k-i}^{(n)} - m_{k+i}^{(n)} \right) p^{(n+k-i)/2} (1-p)^{(n-k+i)/2}
 \end{aligned}$$

となる。これは、非対称ランダムウォークの S_n の分布

$$P(S_n = k) \equiv q_k^{(n)} = m_k^{(n)} p^{(n+k)/2} (1-p)^{(n-k)/2}$$

を使って、

$$P(S_n = k, (M_U(\theta))^n > 0 \mid S_0 = i) = q_{k-i}^{(n)} - \left(\frac{1-p}{p} \right)^i q_{k+i}^{(n)} \quad (4.34)$$

とも表され、対称な ($p = 0.5$) 場合に比べて $\left(\frac{1-p}{p} \right)^i$ の部分が補正されたものになっている。 p が大きくなると原点に戻る可能性が少なくなり、タバー確率は大きくなるが、確かにそうになっている。

この確率はまた、原点に吸収壁を想定したランダムウォーク $\{S'_n\}$ の n ステップ推移確率

$$p_{ik}^{(n)} = P(S'_n = k \mid S'_0 = i), \quad k = 1, 2, \dots$$

を与える公式でもある。

練習 4.12 非対称なランダムウォークで、原点から出発し、 n ステップ後に状態 $k(> 0)$ を訪問するまで、一度も状態 $s(> k)$ を訪問しない確率が以下で与えられることを示しなさい。

$$q_k^{(n)} - \left(\frac{1-p}{p} \right)^{s-k} q_{2s-k}^{(n)}$$

4.3.4 初到達時間の分布

$S_0 = i(> 0)$ から出発して、時点 n で初めて原点を訪問する確率を求めたい。 T_0 を初めて原点を訪問するまでの推移回数とすると、 $T_0 - 1$ で状態が 1、それまでは状態 0 を訪問していないのだから、

$$\begin{aligned}
 \{T_0 = n \mid S_0 = i\} &\Leftrightarrow \{S_n = 0, \min S_{1:(n-1)} > 0 \mid S_0 = i\} \\
 &\Leftrightarrow \{X_n = -1, S_{n-1} = 1, \min S_{1:(n-1)} > 0 \mid S_0 = i\}
 \end{aligned}$$

と表される。したがって、タバー確率の計算を利用して、

$$P(T_0 = n \mid S_0 = i) = (1-p) \left(q_{1-i}^{(n-1)} - \left(\frac{1-p}{p} \right)^i q_{1+i}^{(n-1)} \right) \quad (4.35a)$$

となる。

これを、(練習のために)測度変換を利用して、対称なランダムウォークの場合の結果を利用して求めてみよう。計算法はタブー確率を計算した場合とほとんど同じである。

$$\begin{aligned} P(T_0 = n \mid S_0 = i) \\ &= P(U_n = -1, Z_{n-1} = 1, \min_{1 \leq j \leq n-1} Z_j > 0 \mid Z_0 = i) e^{-i\theta} (M_U(\theta))^n \\ &= \left(m_{1-i}^{(n-1)} - m_{1+i}^{(n-1)} \right) 2^{-n} 2^n p^{(n-i)/2} (1-p)^{(n+i)/2} \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} m_{1-i}^{(n-1)} p^{(n-i)/2} (1-p)^{(n+i)/2} &= (1-p) q_{1-i}^{(n-1)} \\ m_{1+i}^{(n-1)} p^{(n+i)/2} (1-p)^{(n-i)/2} &= \frac{(1-p)^{i+1}}{p^i} q_{1+i}^{(n-1)} \end{aligned}$$

であることを使うと、

$$P(T_0 = n \mid S_0 = i) = (1-p) \left(q_{1-i}^{(n-1)} - \left(\frac{1-p}{p} \right)^i q_{1+i}^{(n-1)} \right)$$

となり、上と同じ結果に到達する。

練習 4.13 式 (4.35a) が成り立つことを確かめよ。

4.3.5 最小値の分布

状態 0 から出発して、 n 回推移を繰り返したときの最小値 $\min S_{1:n}$ の確率分布を計算したい。最小値の計算には補分布を使うのが有効である。

$$\begin{aligned} P(\min S_{1:n} = k \mid S_0 = 0) \\ &= P(\min S_{1:n} > k-1 \mid S_0 = 0) - P(\min S_{1:n} > k \mid S_0 = 0) \end{aligned}$$

$\min S_{1:n} > k$ となるためには n 回推移中状態 k を訪問してはいけないということだから、時点 n での状態で条件を付けてタブー確率を使って計算できる。実際、

$$\begin{aligned} P(\min S_{1:n} > k \mid S_0 = 0) &= \sum_{j=k+1}^{\infty} P(S_n = j, \min S_{1:n} > k \mid S_0 = 0) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} P(S_n = j, \min S_{1:n} > 0 \mid S_0 = -k) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} q_{j+k}^{(n)} - \left(\frac{p}{1-p} \right)^k q_{j-k}^{(n)} \end{aligned}$$

これを上の式に代入して整理すると、次が得られる。

$$\begin{aligned} P(\min S_{1:n} = k \mid S_0 = 0) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(q_{j+k-1}^{(n)} - \left(\frac{p}{1-p} \right)^k q_{j-k+1}^{(n)} \right) - \sum_{j=1}^{\infty} \left(q_{j+k}^{(n)} - \left(\frac{p}{1-p} \right)^k q_{j-k}^{(n)} \right) \\ &= q_k^{(n)} - \left(\frac{p}{1-p} \right)^k q_{1-k}^{(n)} \end{aligned}$$

練習 4.14 同じような考え方を使って、対称な場合の最小値の分布を直接導き、非対称の場合で求めた式の p に 0.5 を入れた式と一致することを確認せよ。

$$P(\min Z_{1:n} = k \mid Z_0 = 0) = \left(m_k^{(n)} - m_{1-k}^{(n)} \right) 2^{-n}$$

4.4 ランダムウォークとマルチンゲール

$Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ が与えられると、 X_{n+1} の (条件付き) 期待値が X_n に等しい

$$E(X_{n+1} \mid Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = X_n$$

となるような、有界な確率過程 $\{X_n\}$ は $\{Y_n\}$ に関してマルチンゲールであるという。有界とは

$$E(|X_n|) < \infty, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.36)$$

であることをいう。繰り返し賭をする、という状況を考え、 X_n を時点 n における所持金、 Y_n を時点 n (まで) に得られる情報 (過去の賭の結果など) と考えると、次の賭をした後の所持金は平均的には増やすことが出来ない、ということを数学的に翻訳したのがマルチンゲールである (元々賭の言葉に由来している)。「賭 = 株価の上下」と考えると、株価変動が予測できないとき、マルチンゲールモデルを想定することは自然の成り行きである。

対称なランダムウォーク $\{S_n\}$ はそれ自身に関してマルチンゲールである。なぜならば、

$$S_{n+1} = S_n + U_{n+1}$$

なので、

$$E(|S_n|) \leq E(|S_{n-1}|) + E(|U_n|) \leq \sum_{i=1}^n E(|U_i|) < \infty$$

が成り立つ。さらに、 U_{n+1} の期待値は 0 なので、 $(S_0, S_1, S_2, \dots, S_n)$ が与えられると、 S_{n+1} の条件付き期待値が S_n に等しくなるからである。

非対称なランダムウォークはそれ自身マルチンゲールにはならないが、次のような変換を施すことで、マルチンゲール化することが出来る。

命題 4.5 ランダムウォーク $\{S_n\}$ に対して、

$$Z_n = \frac{e^{\theta(S_n - S_0)}}{(M_X(\theta))^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.37)$$

によって新たな確率過程 $\{Z_n\}$ を構成すると、 $\{Z_n\}$ は $\{S_n\}$ に関してマルチンゲールになる。ただし、 $M_X(\theta)$ は X のモーメント母関数である。

なぜならば、

$$Z_n = \frac{e^{\theta(X_1 + X_2 + \dots + X_n)}}{(M_X(\theta))^n}$$

と書けることから有界で、

$$E(Z_{n+1} \mid S_0, S_1, \dots, S_n) = \frac{e^{\theta(S_n - S_0)}}{(M_X(\theta))^n} E\left(\frac{e^{\theta X_{n+1}}}{M_X(\theta)}\right) = \frac{e^{\theta(S_n - S_0)}}{(M_X(\theta))^n} = Z_n$$

となるからである。2 番目の等式はモーメント母関数の定義式を適用した。

特に、

$$M_X(\theta) = pe^\theta + (1-p)e^{-\theta} = 1 \Leftrightarrow e^\theta = \frac{1-p}{p} \quad (4.38)$$

となるような θ を選べば、

$$Z_n = \left(\frac{1-p}{p} \right)^{X_1+X_2+\cdots+X_n} \quad (4.39)$$

が得られる。

命題 4.6 パラメータ p の非対称なランダムウォーク $\{S_n\} (S_0 = 0)$ に対して

$$\tilde{S}_n = \left(\frac{1-p}{p} \right)^{S_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.40)$$

によって新たな確率過程 $\{\tilde{S}_n\}$ を構成すると、 $\{\tilde{S}_n\}$ は $\{S_n\}$ に関してマルチンゲールになる

実際、

$$\begin{aligned} E(\tilde{S}_{n+1} | S_1, \dots, S_n) &= E\left(\left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n+X_{n+1}} | S_1, \dots, S_n\right) \\ &= \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n} E\left(\left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_{n+1}}\right) \\ &= \tilde{S}_n \left(\frac{1-p}{p} \times p + \frac{p}{1-p} \times (1-p)\right) = \tilde{S}_n \end{aligned}$$

となるからである。

4.4.1 任意抽出定理 optional sampling theorem

マルチンゲールのモデル化の有効性は時間的な要因を無視できるという任意抽出定理によって明らかになる。時間を表す確率変数 T が停止時 **stopping time** であるとは、 $T = n$ かどうかを、 n より先の情報を使わずに決定できることをいう。たとえば、初到達時刻は停止時になるが、あと 1 回成功したら止める、と決めたときの止める直前、は停止時ではない。任意抽出定理は、マルチンゲールならば、停止時における期待値は初期状態の期待値と同じ、ということを表したものである。

命題 4.7 $\{X_n\}$ が $\{Y_n\}$ に関してマルチンゲールであって、 T は確率 1 で有界な停止時とする。このとき、任意の $n < T$ に対して

$$E(X_n^2) \leq A, \quad n = 1, 2, \dots, T \quad (4.41)$$

となる A が存在するならば、次の式が成り立つ

$$E(X_T) = E(X_0) \quad (4.42)$$

X_n^2 の有界条件は必須である。その条件を外すと $E(X_T) = E(X_0)$ が成り立たない例を与える。対称なランダムウォーク $\{S_n\}$ はそれ自身に関してマルチンゲールであるが

$$E(S_n^2) = 1 + 2 \sum_i E(X_i) + \sum_i E(X_i^2) + 2 \sum_{i < k} E(X_i) E(X_k) = n + 1$$

で有界とならない。 $S_0 = 1$ として、状態 0 への初到達時刻を T とすると、 T は確率 1 で有限。もちろん

$$E(S_T) = 0 \neq 1 = E(S_0)$$

これは S_n^2 が有界にならないからである。

例 4.4 (ギャンブラーの破産問題) 任意抽出定理を使って問題を解く例として、ギャンブラーの破産問題を取り上げる。 A, B 両者のチップの合計が N で、最初の A のチップの枚数を i としたとき、 A が先に破産する確率を r_i とする。破産した時点 T とすると、 $r_i = P(S_T = 0 \mid S_0 = i)$ と書ける。 T が有界な停止時であることを示すためには、 $a_i = P(T < \infty \mid S_0 = i)$ として、すべての a_i が 1 になることを言えば良い。これは、最初の勝負の結果で層別した全確率の公式で証明することができる。実際

$$a_i = pa_{i+1} + (1-p)a_{i-1} \Rightarrow a_{i+1} - a_i = \frac{1-p}{p}(a_i - a_{i-1}) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^i (a_1 - 1) \quad (4.43)$$

が成り立つ。 $i = N-1$ と置けば

$$0 \leq 1 - a_{N-1} = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{N-1} (a_1 - 1) \leq 0$$

となり、 $a_{N-1} = 1$ が導かれる。以下順番に $a_{N-2} = a_{N-3} = \dots$ が 1 になる。

S_T は 0 か N のいずれかで、求めたい確率は $r_i = P(S_T = 0 \mid S_0 = i)$ である。命題 4.5 と命題 4.6 より、 $\{S_n\}$ を

$$\tilde{S}_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n - S_0}$$

によって変換すると、 $\{\tilde{S}_n\}$ はマルチンゲールになるので、任意抽出定理より $E(\tilde{S}_T) = E(\tilde{S}_0) = 1$ が成り立つ。

$$E(\tilde{S}_T) = r_i \left(\frac{1-p}{p}\right)^{-i} + (1-r_i) \left(\frac{1-p}{p}\right)^{N-i} = 1$$

これより、

$$r_i = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{N-i} - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{N-i} - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{-i}} = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^N - \left(\frac{1-p}{p}\right)^i}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^N - 1} \quad (4.44)$$

が得られる。

$Q = 1$ の場合、すなわち対称なランダムウォークの場合は、 r_i に関して a_i と同じような漸化式が成り立ち、

$$r_i = pr_{i+1} + (1-p)r_{i-1} = \frac{r_{i+1} + r_{i-1}}{2} \quad (4.45)$$

これより、 $r_i = 1 - \frac{i}{N}$ が導かれる (確かめよ)。一方、非対称の場合の結果で $Q = 1$ としたい場合は、ロピタルの定理を使えば $r_i = 1 - \frac{i}{N}$ を導くことができ、対称なランダムウォークの場合の破産確率に一致する。

練習 4.15 非対称な場合の破産確率の公式に $Q = 1$ を代入して、 $r_i = 1 - \frac{i}{N}$ となることを示さない。

4.5 ブラウン運動

4.5.1 ランダムウォークの連続化

パソコンで長さ 10000 くらいのランダムウォークを描いてみると、鏡像の原理を証明するとき
に用いた図柄とはかなり印象の異なるサンプルパスが得られる。R ならば

```
plot(cumsum(sample(c(-1,1),10000,replace=T)),type="l")
```

とだけ入力すればよい。それはまた、第一章の最初の例である株価の動きとも似た動きをしている
ことに気づく。そこで、ランダムウォークの各ステップの時間刻みを小さくしていったときの
極限はどのような確率過程になるか、ということを考えてみよう。すなわち、時間間隔 Δt で状
態変化するランダムウォーク S_n を考え、 $\Delta t \rightarrow 0$ としたときの極限がどのような振る舞いをす
るか、ということに興味がある。

時間長 t を固定して n 等分し、 $\Delta t = t/n$ 間隔で $X_1, X_2, \dots$ が観測されると仮定する。ただし、
それらは独立で、

$$P(X = \Delta x) = P(X = -\Delta x) = 0.5 \quad (4.46)$$

という分布に従う確率変数とする。このとき、 $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ を $S(n\Delta t)$ と記すと、

$$\begin{aligned} E(S(n\Delta t)) &= nE(X) = 0 \\ V(S(n\Delta t)) &= nV(X) = n(\Delta x)^2 = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} t \end{aligned}$$

となる。ここで $\Delta t \rightarrow 0$ としたらどうなるかを考える。 $S(n\Delta t) \rightarrow S(t)$ の分散が有限で、しか
も正の値に止まるために、 $(\Delta x)^2/\Delta t$ が有限の値に収束する必要がある。そのために、 $\sigma > 0$ と
して、

$$\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = \sigma^2 \Leftrightarrow \Delta x = \sigma\sqrt{\Delta t} \quad (4.47)$$

が成り立つようにランダムウォークの変位 Δx を決める。こうして、

$$E(S(t)) = 0, V(S(t)) = \sigma^2 t \quad (4.48)$$

となる連続時間の確率過程 $\{S(t), t \geq 0\}$ が得られる。

2 項分布からポワソン過程を導いたときに議論したのと同様、連続化する直前まではランダム
ウォークの性質を持っているので、この確率過程は独立増分、定常増分などの性質を保存し
ていると考えられる。実際、連続化する一歩手前で止めて考えれば、 $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ (い
ずれも Δt の定数倍とする) に対して $S(t_2) - S(t_1)$ と $S(t_4) - S(t_3)$ は独立で、それぞれ長さ
 $(t_2 - t_1)/\Delta t, (t_4 - t_3)/\Delta t$ のランダムウォークしているからである。

さらに、この連続化する直前のランダムウォークにドモアブル・ラプラスの定理を適用すると、

$$\frac{S(n\Delta t) - E(S(n\Delta t))}{\sqrt{V(S(n\Delta t))}} = \frac{S(n\Delta t)}{\sigma\sqrt{t}} \quad (4.49)$$

が標準正規分布で近似できることが導かれる。したがって、 $S(t)$ は平均 0、分散 $\sigma^2 t$ の正規分布
に従う、あるいは、定常増分の性質から、 $S(t+s) - S(s)$ は平均 0、分散 $\sigma^2 t$ の正規分布に従う
ことが分かる。この $\{S(t), t \geq 0\}$ はブラウン運動と呼ばれる。

$S(t+s) - S(s)$ が平均 0、分散 $\sigma^2 t$ の正規分布に従うことをきちんと確かめるためにはモーメント母関数を使えば良い。 $S(n\Delta t)$ のモーメント母関数は

$$E(\exp(\theta S(n\Delta t))) = \left(\frac{1}{2} e^{\theta\sigma\sqrt{\Delta t}} + \frac{1}{2} e^{-\theta\sigma\sqrt{\Delta t}} \right)^n$$

となる。 $\Delta t = t/n$ と置き換えて、指数関数をテラー展開すると、奇数次の項が消える

$$\frac{1}{2} e^{\theta\sigma\sqrt{t/n}} + \frac{1}{2} e^{-\theta\sigma\sqrt{t/n}} = 1 + \frac{\sigma^2}{2n} t\theta^2 + o(n^{-1})$$

したがって、

$$E(\exp(\theta S(n\Delta t))) = \left(1 + \frac{\sigma^2}{2n} t\theta^2 + o(n^{-1}) \right)^n \rightarrow \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2 t\theta^2\right) \quad (4.50)$$

これは平均 0、分散 $\sigma^2 t$ の正規分布のモーメント母関数に他ならない。

4.5.2 ブラウン運動

ブラウン運動の数学的な定義は次のように与えられる。

定義 4.1 連続時間、連続状態の確率過程 $\{X(t), t \geq 0\}$ がブラウン運動（過程）であるとは、次の条件を満たす場合をいう。

- (1) $X(0) = 0$
- (2) 独立増分を持つ
- (3) 任意の $t > 0, s \geq 0$ に対して、 $X(t+s) - X(s)$ が平均 0、分散 $\sigma^2 t$ の正規分布に従う。

$$P(X(t+s) - X(s) \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma} e^{-z^2/(2\sigma^2 t)} dz = \Phi\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{t}}\right) \quad (4.51)$$

3 番目の条件式の右辺は s によらない形をしている。確率が区間の幅だけに依存するという性質は定常性と呼ばれ、 $\{X(t)\}$ は定常増分を持つと言われる。3 番目の条件からサンプルパスは連続であることは分かるが、同じ 3 番目の条件からどんなに小さな区間 $[s, s+t]$ であっても、その間にジャンプする量は上限がないので、なめらかな変化は期待できない。実際サンプルパスは至るところ微分不可能となることが、微分係数の計算によって確かめられる。平均変化率の 2 乗の期待値を計算すると

$$E\left(\left(\frac{X(t+h) - X(t)}{h}\right)^2\right) = \frac{1}{h^2} E\left((X(t+h) - X(t))^2\right) = \frac{\sigma^2}{h} \rightarrow \infty, \quad (h \rightarrow 0) \quad (4.52)$$

となって、 t における微分係数は有限の値に収束しない、すなわち t で（ということは任意の点で）微分できない。

特に $\sigma = 1$ の場合を標準ブラウン運動と言い、 $\{B(t), t \geq 0\}$ あるいは $\{W(t), t \geq 0\}$ と記すことが多い（ W はこの確率過程を研究した Wiener の頭文字）。

独立増分という性質を使うと、自己共分散 $C(X(t), X(s))$ が以下のようにして計算できる。 $t > s$ とすると、

$$C(X(t), X(s)) = E(X(t)X(s)) = E((X(t) - X(s) + X(s))X(s)) = \sigma^2 s \quad (4.53)$$

$t < s$ の場合も同様に計算できるので、両方の場合を合わせて次の式が得られる

$$C(X(t), X(s)) = \sigma^2 \min\{s, t\} \quad (4.54)$$

練習 4.16 標準ブラウン運動 $\{B(t), t \geq 0\}$ に対して、(1) $B(s)B(t+s)$ の期待値を計算しなさい。(2) $B(s)$ と $B(t+s)$ の共分散を計算しなさい。

4.5.3 最大値の分布、初到達時間

ブラウン運動の興味深い問題の一つとして、ある区間の間の最大値の分布を調べる。区間 $[0, T]$ の間の標準ブラウン運動 $\{B(t), t \geq 0\}$ に対して、その最大値を $R(T)$ としたとき、 $R(T) > a (> 0)$ の確率を知りたい。サンプルパスが連続であることを使うと、直感的にも明らかな方法で答えを求めることが出来る。

命題 4.8 標準ブラウン運動 $\{B(t), 0 \leq t \leq T\}$ に対して、その最大値を $R(T)$ としたとき、その補分布関数は次の式で与えられる：

$$P(R(T) \geq a) = 2 \int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-x^2/(2T)} dx \quad (4.55)$$

証明 $a > 0$ を一つ固定して $\{B(t), 0 \leq t \leq T\}$ のサンプルパスを、 $B(T) \geq a$ となるものと、 $B(T) < a$ となるものの二種類に分ける。 $B(T) \geq a$ ならば、 $R(T) \geq a$ であることは明らか。

一方、 $B(T) = b < a$ で $R(T) \geq a$ となるサンプルパスを任意に一つ考えよう。サンプルパスの連続性から、このパスには $B(t) = a$ となるような $0 < t < T$ があるはず。その最初の t の値を t^* としよう。ランダムウォークで鏡像の原理を説明したときと同じように、 $y = a$ を対称軸として、区間 $[t^*, T]$ のサンプルパス $B(t)$ の鏡像 $\tilde{B}(t)$ を描く。区間 $[0, t^*]$ では $\tilde{B}(t) = B(t)$ とすると、 $B(t)$ と $\tilde{B}(t)$ は 1 対 1 に対応し、 $\tilde{B}(T) = 2a - b > a$ となる。逆に、任意の $B(T) > a$ となるサンプルパスには、その鏡像の $\tilde{B}(t)$ が対応する。したがって、 $R(T) \geq a$ で $B(T) < a$ となる確率は $B(T) > a$ となる確率と等しい。ということは、 $R(T) > a$ の確率は $B(T) > a$ となる確率の 2 倍に等しい。これが上の命題で主張したいことであった。□

このような考え方は、ランダムウォークの場合と同様、鏡像の原理と呼ばれる。

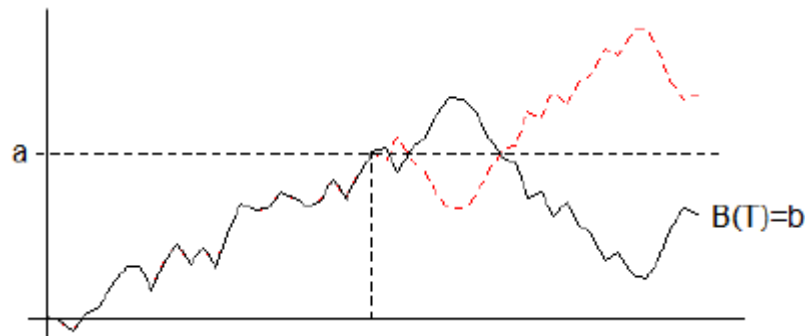


図 9 ブラウン運動における鏡像原理

ブラウン運動のもう一つの興味深い問題として、状態 a を初めて訪問する時間がある。

命題 4.9 標準ブラウン運動 $\{B(t), t \geq 0\}$ に対して、状態 $a \neq 0$ を初めて訪問する時点を Y と

したとき、その分布関数は次の式で与えられる：

$$P(Y < t) = 2 \int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/(2t)} dx \quad (4.56)$$

証明 $Y < t$ 、すなわち時刻 t までに状態 a を訪問した、ということは区間 $[0, t]$ の間の最大値 $R(t)$ が少なくとも a 以上、ということと同値である。したがって、上の命題を使って、次が成り立つ。

$$P(Y < t) = P(R(t) \geq a) = 2 \int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/(2t)} dx$$

□

4.6 金融工学への応用

4.6.1 2項格子モデル

1章で見た株価の推移はランダムウォークのサンプルパスと同じような動きをしている。株価に限らず、いろいろな（有価）証券 security の価格の推移は予想の出来ないランダムに起きる様々な事象によって引き起こされると考えられるので、ランダムウォークを使ってモデル化することが出来るかもしれない。

通常のランダムウォークだと、マイナスになってしまう可能性があるので不適切だが、乗法的なランダムウォークを想定することでその問題を回避することが出来る。すなわち、 Δt 時間毎に $1 + u\Delta t$ 倍になるか、 $1 + d\Delta t$ 倍になるかのいずれか、という動きをすると仮定する。 u は up、 d は down のつもりだが、 $d < 0$ と決めているわけではない。 $2\Delta t$ 時間後には $(1 + u\Delta t)^2$ 倍になるか、 $(1 + u\Delta t)(1 + d\Delta t)$ 倍になるか、 $(1 + d\Delta t)^2$ 倍になるか、の3通りの可能性がある。一般に、 $n\Delta t$ 時間後には、 $(1 + u\Delta t)^i (1 + d\Delta t)^{n-i}$ 倍 ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) になる可能性がある。

初期時点の証券価格を Y_0 、 $n\Delta t$ 時間後の価格を Y_n 、 R_k は $u\Delta t$ または $d\Delta t$ を取る確率変数とすると、

$$Y_n = (1 + R_n)Y_{n-1} = \dots = \prod_{k=1}^n (1 + R_k)Y_0 \quad (4.57)$$

と表すことが出来る。 R_k の確率を

$$P(R_k = u\Delta t) = p, P(R_k = d\Delta t) = 1 - p \quad (4.58)$$

によって定義すると、 Y_n の確率関数は次のように与えられる。

$$P(Y_n = Y_0(1 + u\Delta t)^k (1 + d\Delta t)^{n-k}) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (4.59)$$

このような証券価格変動のモデルを2項格子モデルという。

R_k の確率分布は、その証券の変動を予測する人によって異なる。それでは取引が出来ないので、共通の尺度が必要となる。

4.6.2 リスク中立確率

今まで扱ってきたランダムウォークと関連づけるためには、証券価格そのものではなく、その対数を取ったものを考えれば良い。 $Y_n = (1 + R_n)Y_{n-1}$ の対数を取れば

$$\log Y_n = \log(1 + R_n) + \log Y_{n-1} \quad (4.60)$$

となるが、 $\log Y_n$ の代わりに Z_n 、 $\log(1 + R_n)$ の代わりに X_n と記すと ($Y_0 = 1$ とする)

$$Z_0 = \log Y_0 = 0$$

$$Z_n = \sum_{k=1}^n \log(1 + R_k) = Z_{n-1} + X_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

したがって、 $\{Z_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ は 1 ステップを Δt とするランダムウォークとなる。ここで、

$$P(X_i = \log(1 + u\Delta t)) = p, P(X_i = -\log(1 + d\Delta t)) = 1 - p$$

である。

$\Delta t \rightarrow 0$ としたとき、意味のある結果を導くためには、ランダムウォークの連続化のところで仮定したように、 $\log(1 + u\Delta t), \log(1 + d\Delta t)$ が $\sqrt{\Delta t}$ のオーダーでなければいけない。そこで、

$$\log(1 + u\Delta t) = \sigma\sqrt{\Delta t} \Rightarrow 1 + u\Delta t = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (4.61)$$

と仮定する。また、

$$\log(1 + u\Delta t) \times \log(1 + d\Delta t) = 1 \Rightarrow 1 + d\Delta t = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

とする。

一方、 $1 + R_n$ は証券の利回りを表すが、平均的には国債の金利 $r\Delta t$ に等しくなると仮定すると、

$$E(1 + R_n) = e^{r\Delta t} \quad (4.62)$$

が成り立つ必要がある。定義に従って計算すると

$$E(1 + R_n) = 1 + pu\Delta t + (1 - p)d\Delta t = e^{r\Delta t} \Leftrightarrow p = \frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} \quad (4.63)$$

が導かれる。 Δt が十分に小さければ、指数関数を展開して

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} \approx \frac{1 + r\Delta t - (1 - \sigma\sqrt{\Delta t} + \sigma^2\Delta t/2)}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sigma} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \sqrt{\Delta t} \quad (4.64)$$

となる。結局、証券価格が $e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ 倍になる確率が

$$p^* = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sigma} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \sqrt{\Delta t} \quad (4.65)$$

$e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ 分の 1 倍になる確率が $1 - p^*$ という乗法的ランダムウォークに従うと考えると、多くの人が納得できる $\{Y_n\}$ の確率構造が得られる。この確率はリスク中立確率と呼ばれる。

4.6.3 幾何ブラウン運動

この確率を使うと、 X_k の平均分散は以下ようになる。

$$E(X_k) = E(\log(1 + R_k)) = p\sigma\sqrt{\Delta t} - (1 - p)\sigma\sqrt{\Delta t} = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t \quad (4.66)$$

$$V(X_k) = (\Delta x)^2 - E(X_k)^2 = \sigma^2\Delta t + o(\Delta t) \quad (4.67)$$

ランダムウォークを連続化したときと同様に、 $t = n\Delta t$ とし、 $Z^{(n)}(t) = Z_n$ の $\Delta t \rightarrow 0$ とした極限を $Z(t)$ とすると、 $Z(t)$ は平均 $\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t$ 、分散が $\sigma^2 t$ のブラウン運動になる。

このような $Z(t)$ によって、 $Y(t) = e^{Z(t)}$ と表される確率過程 $\{Y(t), t \geq 0\}$ は幾何ブラウン運動と呼ばれる。 $Y(t)$ の期待値は e^{rt} となり、 $E(e^{Z(t)}) (= e^{rt})$ と $e^{E(Z(t))} (= e^{(r-\sigma^2/2)t})$ が等しくならないことに注意しよう。

$Z(t)$ はブラウン運動なので $\log Y(t) = Z(t)$ は正規分布に従う。対数を取ったものが正規分布に従う確率変数は対数正規分布に従うという。幾何ブラウン運動は対数正規分布に従う。

練習 4.17 平均 μ 分散 σ^2 の正規分布に従う確率変数 X に対して、 $Y = e^X$ としたとき、 Y の期待値は X のモーメント母関数 $M_X(\theta)$ を使って $M_X(1)$ で与えられることを示しなさい。このことを使って $Z(t)$ が平均 $\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t$ 、分散 $\sigma^2 t$ の正規分布に従うとき、 $Y(t) = e^{Z(t)}$ の期待値が e^{rt} になることを示しなさい。

練習 4.18 平均 μ 分散 σ^2 の正規分布に従う確率変数 X に対して、 e^X の密度関数が

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}} e^{-(\log x - \mu)^2 / (2\sigma^2)} \quad (4.68)$$

で与えられることを示し、その期待値を計算し、それが $M_X(1)$ に一致することを示しなさい。ただし、 $M_X(\theta)$ は X のモーメント母関数とします。

4.6.4 確率微分方程式

$Y(t)$ を投資した場合の Δt 後の増分 $\Delta Y(t) = Y(t + \Delta t) - Y(t)$ を $Y(t)$ で割ったものは (Δt の間の) 収益率と呼ばれ、投資の効果を計る重要な指標である。 $\Delta Z(t) = Z(t + \Delta t) - Z(t)$ と置くと

$$\begin{aligned} \Delta Y(t) &= Y(t + \Delta t) - Y(t) = e^{Z(t+\Delta t)} - e^{Z(t)} = e^{Z(t)} (e^{\Delta Z(t)} - 1) \\ \Rightarrow \frac{\Delta Y(t)}{Y(t)} &= e^{\Delta Z(t)} - 1 \end{aligned}$$

と表される。 $\Delta Z(t)$ は微少量だと思って $e^h - 1 = h + \frac{h^2}{2} + o(h)$ という展開式に当てはめると、

$$e^{\Delta Z(t)} - 1 \approx \Delta Z(t) + \frac{1}{2}(\Delta Z(t))^2 \quad (4.69)$$

が得られる。

ここで、 $\Delta Z(t)$ は平均 $\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t$ 、分散が $\sigma^2\Delta t$ の正規分布に従うことから、平均 0、分散 Δt の正規分布に従う確率変数 $\Delta W(t)$ を使って

$$\Delta Z(t) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\Delta W(t)$$

と書き換え、高次の項 $(\Delta Z(t))^2$ はその期待値 $\sigma^2\Delta t$ で書き換えることにより、

$$\Delta Z(t) + \frac{1}{2}(\Delta Z(t))^2 \approx r\Delta t + \sigma\Delta W(t)$$

となる。したがって

$$\frac{\Delta Y(t)}{Y(t)} \approx r\Delta t + \sigma\Delta W(t)$$

が得られる。 $\Delta t \rightarrow 0$ としたときの等号関係を表すために、 $\Delta t, \Delta Y, \Delta W$ の代わりに dt, dY, dW と記すと、結局

$$\frac{dY(t)}{Y(t)} = rdt + \sigma dW(t) \quad (4.70)$$

が導かれる。このような形の式を確率微分方程式という。

dt, dY, dW は微分といい、通常の微積分で重要な概念であるが、ここでは $o(\Delta t)$ を一々書かなくても Δt 間隔でシステムを観測した場合に近似的に成り立つ関係を表す記号、と考えておけばよい。

確率微分方程式を実際に解く場合には、確率積分という概念が必要で、その道具を利用して、証券価格、金利、為替レートなどの確率過程によって引き起こされるさまざまな問題を解くのが金融工学の基本的枠組みの一つである。

演習問題

問題 4.1 (1) 日経平均株価の 1 年分 $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ を使って、日次収益率 $(x_{n+1} - x_n)/x_n$ を計算し、その平均、標準偏差を推定しなさい。

(2) 1 年を 1 単位時間とすると、 $\Delta t = 1/N$ として、 $X(n\Delta t) = x_n$ という標本値が得られた、と考えることが出来る。(1) で得られた平均、標準偏差を $\mu\Delta t, \sigma\sqrt{\Delta t}$ と見なして、

$$\frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{X(t)} = \mu\Delta t + \sigma(B(t + \Delta t) - B(t))$$

という確率微分方程式の離散バージョンの式を利用し、正規乱数を使って、日経平均株価の擬似データを生成し、実データと重ねて描きなさい。ただし、 $B(t)$ は標準ブラウン運動とします。再計算キーを押して、いろいろな擬似データを作成し、それらの総合的な印象を説明しなさい。

問題 4.2 確率 $p = 0.5(1 + \mu\sqrt{\Delta t})$ で $\sqrt{\Delta t}$ 増え、確率 $1 - p$ で $\sqrt{\Delta t}$ 減るという動きを Δt きざみでくりかえすランダムウォークを考える。このとき、 $\Delta t \rightarrow 0$ とすると、このランダムウォークはドリフトパラメータ μ を持つブラウン運動に収束することを示しなさい。

問題 4.3 $X(n\Delta t)$ は Δt 後に確率 $p = 0.5(1 + \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta t})$ で $e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}X(n\Delta t)$ になり、確率 $1 - p$ で $e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}X(n\Delta t)$ になるという動きを $n = 1, 2, \dots$ で繰り返す、という確率過程を考える。このとき、 $t = n\Delta t$ (一定) として、 $\Delta t \rightarrow 0$ とすると、 $\log X(t)$ は平均 μt 、分散 $\sigma^2 t$ の正規分布に従う確率変数に収束することを示しなさい。

問題 4.4 ドリフトパラメータ μ 、拡散パラメータ σ を持つブラウン運動を $\{X(t), t \geq 0\}$ としたとき、 $X(t), X(t + s)$ の結合密度関数を計算しなさい。

問題 4.5 対称なランダムウォークと正整数 $a, b > 0$ に対して、 $-b$ を訪問する前に a を訪問する確率を計算しなさい

ヒント $-b$ を訪問する前に a を訪問するという事象を A として、 $-b < i < a$ に対して、 $X_0 = i$ としたときの A の条件付き確率を r_i と置くと、 r_i は r_{i-1}, r_{i+1} を使って表される。あとは差分方程式を解く問題。

問題 4.6 対称なランダムウォークと正整数 $a > 0$ に対して、初めて a を訪問するまでの時間を

T としたとき、 $T \leq n$ となる確率を計算しなさい。

問題 4.7 対称なランダムウォークと正整数 $a, b > 0$ に対して、初めて $-b$ か a を訪問するまでの時間の期待値は ab で与えられることを証明しなさい。

ヒント 状態 i から始めて、初めて $-b$ か a を訪問するまでの時間の期待値を t_i として、 t_i を t_{i+1}, t_{i-1} を使って表し、差分方程式を作る。あとは境界条件 $t_{-b} = t_a = 0$ を使う。 $t_{a-1} = t_{-b+1}, t_{a-2} = t_{-b+2}, \dots$ などが成り立っているはず。

問題 4.8 標準ブラウン運動 $B(t)$ について、 $P(B(2) > 2 \mid B(0) = 0)$ を求めなさい

問題 4.9 標準ブラウン運動 $B(t)$ について、定数 $c > 0$ としたとき、 $B(ct)/\sqrt{c}$ も標準ブラウン運動に従うことを説明しなさい。

ヒント $B(ct)/\sqrt{c}$ が平均 0、分散 t の正規分布に従っていることを言えばよい。

問題 4.10 標準ブラウン運動 $B(t)$ について、 $E(B(t)B(t+s))$ を求めなさい。ただし $s > 0$ とする。

問題 4.11 拡散パラメータが σ のブラウン運動 $B(t)$ で、 $B(1) = \sigma$ という条件の下で $B(2) > 0$ である確率を計算しなさい。

問題 4.12 拡散パラメータが σ のブラウン運動 $B(t)$ で、 $B(2) = \sigma$ という条件の下で $B(1) > 0$ である確率を計算しなさい。

問題 4.13 拡散パラメータが σ のブラウン運動 $B(t)$ について、初めて $a(> 0)$ となる時刻を T_a としたとき、 $T_a > 1$ となる確率を計算しなさい

ヒント $B(1) \geq a$ という事象と $T_a > 1$ という事象の関係を調べなさい。

問題 4.14 拡散パラメータが σ のブラウン運動 $B(t)$ について、 $[0, 1]$ での最大値が a 以下となる確率を計算しなさい。

ヒント ある区間で最大値が a 以下となる事象と、初めて a を訪問するのがその区間の外、という事象の関係を調べなさい。

問題 4.15 株価の変化量（将来の株価から現在価格を引いたもの）が拡散パラメータ σ のブラウン運動に従うものとします。 $t, T, a > 0$ として、時刻 t で $-a$ に値下がりした、という条件の下で、時刻 $t+T$ に 0 以上になる（値を戻す）確率を計算しなさい。

ヒント 再生性を使いなさい。

問題 4.16（続き） $t+T$ までに値を戻す確率を計算しなさい。

問題 4.17 株価の変化量（将来の株価から現在価格を引いたもの）が拡散パラメータ σ のブラウン運動に従うものとします。 $t, T, a > 0$ として、 $[t, t+T]$ の間の最大値が a 以上となる確率を計算しなさい

ヒント 時刻 t の株価（の変化量）で条件を付けて計算する。 $B(t) = x > a$ ならば確率 1、 $x < a$

の場合は...

問題 4.18 ある企業の短期資金は拡散パラメータ σ のブラウン運動に従うものとする。資金が $b(>0)$ を超えたら $b-a(>0)$ を投資に回し、 $c(>0)$ を下回ったら $a-c(>0)$ を長期資金から取り崩す、という管理をしている。投資に回すケースと長期資金から取り崩すケースのどちらが多いか、それぞれの割合を計算しなさい。

ヒント (離散) ランダムウォーク (賭博者の破産問題) の連続化

問題 4.19 現在 100 円の株は 1 ヶ月後に 120 円か 90 円になるものとする。1 ヶ月後にこの株券を 105 円で買うことが出来るコールオプションが 10 円というのは適正価格ですか。金利は 0 とします。

5 マルコフ連鎖

5.1 マルコフモデル

ランダムウォークは、独立同分布する確率変数列 $\{U_1, U_2, \dots\}$ を使って、

$$\begin{aligned} X_n &= X_{n-1} + U_n, \quad n = 1, 2, \dots \\ X_0 &= 0 \end{aligned}$$

によって定義された。したがって、ランダムウォークには、 $n-1$ 時点の状態 X_{n-1} が与えられると、 n 時点での状態 X_n は、 $n-1$ より前の履歴とは無関係に確率的に決定される、という性質がある。時点 $n-1$ を「現在」と考えると、この性質は、現在の状態が与えられると、将来の状態は過去とは独立に決定される、と行うことができる。この性質をマルコフ性という。

一般に、確率過程 $\{X(t), t \geq 0\}$ は、任意の $t, s > 0, k, j, \{x(u), 0 \leq u \leq s\}$ に対して次の式が成り立つとき、マルコフ性を持つと言われる。

$$P(X(t+s) = k \mid X(s) = j, X(u) = x(u) (0 \leq u < s)) = P(X(t+s) = k \mid X(s) = j)$$

おおざっぱな言い方をすると、時点 s を現在とすれば、

$$P(\text{将来} \mid \text{現在, 過去}) = P(\text{将来} \mid \text{現在})$$

と書くことも出来る。

離散時間の確率過程 $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ がマルコフ性を持つとは、任意の $n > 0, k, j, i, \dots, h$ に対して次の式が成り立つことである。

$$P(X_n = k \mid X_{n-1} = j, X_{n-2} = i, \dots, X_0 = h) = P(X_n = k \mid X_{n-1} = j)$$

離散の場合は、「次」の時点があるので、連続の場合に必要な「任意の t 」がいらなくなる。任意の将来時点の確率は、全確率の公式を繰り返し適用することによって、時点 $n-1$ の状態さえ与えられれば決まってしまう。たとえば、

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = k \mid X_{n-1} = j, X_{n-2} = i, \dots, X_0 = h) &= \sum_u P(X_{n+1} = k, X_n = u \mid X_{n-1} = j, \dots) \\ &= \sum_u P(X_{n+1} = k \mid X_n = u, X_{n-1} = j, \dots) P(X_n = u \mid X_{n-1} = j, \dots) \\ &= \sum_u P(X_{n+1} = k \mid X_n = u) P(X_n = u \mid X_{n-1} = j) \end{aligned}$$

のように。ランダムウォークとの違いは、1回1回の推移 $\{U_n\}$ が独立同分布ではなく、 U_n の確率関数が X_{n-1} の値に依存して決まる、という点である。この章では離散時間の確率過程について扱う。

練習 5.1 マルコフ性を持つならば、現在を挟んで、過去と未来は互いに独立、すなわち

$$P(\text{将来, 過去} \mid \text{現在}) = P(\text{将来} \mid \text{現在}) P(\text{過去} \mid \text{現在})$$

が成り立つことを証明しなさい。

5.1.1 マルコフモデル化

システムの状態が時々刻々ランダムに変動する場合に、それにマルコフ性を仮定してマルコフモデルを作り、政策を評価する方法は、きわめて有効な方法として、いろいろな場面で使われている。ランダムウォークを仮定した証券の変動モデルを前提とした金融工学の問題では、マルコフモデルが必須である。在庫管理の問題では、需要が過去の傾向とはほとんど関係なく、ランダムに変動している、というような場合はマルコフモデルとして定式化することが出来る。通信回線の設計の問題では、将来の需要が過去の履歴というよりは、絶対的な時刻の影響を受けて変動する、というような場合は、やはりマルコフモデルとして定式化することが出来る。今まで出てきた確率過程は、再生過程を除いて、マルコフ性を持っている。

逆に、将来のランダム事象が過去の履歴に左右されるようだと、マルコフモデルにはならない。例えば、コイン投げで、表が続けて3回出たら勝ち、という賭は、ベルヌイ試行や2項過程では分析することが出来ない。しかし、モデル化を工夫することによって、一見マルコフ性が成り立たないシステムでも、マルコフモデルとして定式化することが出来る場合がある。例えば今の例の場合、状態として、2項過程のように表の出た累積回数ではなく、連続して表の出た回数とすれば、過去の「必要な履歴」(直前までの連続した表の回数)が「現在」の状態に組み込まれているので、その状態さえあれば、過去の履歴を忘れても将来の確率規則を決めることが出来る。

将来の動きに対して必要な過去の履歴を状態に取り込むことによって、マルコフモデル化するという考え方は一般に多重マルコフモデルといい、システム分析の中で有効な方法として知られる。例えば、毎日のお天気の移り変わりはマルコフ性を持つとは考えにくいだが、1週間分くらいの履歴があればある程度予測が可能かもしれない。その場合は、過去1週間分の天気の移り変わりをその日の「状態(ベクトル)」と定義することで、(お天気ではなく)状態の動きはマルコフモデルで記述することが出来る。

練習 5.2 明日雨が降るかどうかは、今日と昨日の雨降りの様子で決まり、一昨日の天候には影響を受けない、と仮定する。もし、2日続けて雨降りだったら次の日が雨である確率は0.8、2日間とも雨が降らなかったら、次の日に雨が降る確率は0.2、それ以外の場合は、今日と同じ天気(雨かそうでないか)になる確率が0.6とします。このとき、明日と明後日に雨が降る確率はいくつですか。明日と明後日両方とも雨が降らない確率はいくつですか。

5.2 マルコフ連鎖

状態空間が離散で、マルコフ性を持った離散時間確率過程をマルコフ連鎖という。すなわち、確率過程 $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ がマルコフ連鎖であるとは、任意の n と $k, j, i, \dots, h$ に対して、次の式が成り立つことである。

$$P(X_{n+1} = k \mid X_n = j, X_{n-1} = i, \dots, X_0 = h) = P(X_{n+1} = k \mid X_n = j)$$

右辺の条件付き確率を状態推移確率といい、 p_{jk} で表す。

$$p_{jk} = P(X_{n+1} = k \mid X_n = j)$$

状態 j から状態 k へ推移する確率が推移する時点 n によらずいつも一定、という性質を（推移確率の）定常性、あるいは斉時性（せいじせい）といい、これ以降それを仮定する。

例 5.1 2 項過程 $\{S_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ はマルコフ連鎖になる。なぜならば、

$$\begin{aligned} S_n &= S_{n-1} + X_n \\ P(X_n = 1) &= 1 - P(X_n = 0) = p \end{aligned}$$

と書けて、 X_n は $S_{n-2}, S_{n-3}, \dots$ とは無関係に決まるからである。状態推移確率は

$$p_{jk} = P(S_n = k \mid S_{n-1} = j) = P(X_n = k - j)$$

従って、 $k - j$ が $0, 1$ 以外の場合は 0 、

$$p_{j,j+1} = 1 - p_{j,j} = P(X_n = 1)$$

となる。

例 5.2（ランダムウォーク）ベルヌイ試行で、成功したらプラス 1、失敗したらマイナス 1 カウントする、としたとき、 n 回試行後のカウント累計を S_n とする。 n 回目の試行結果を X_n とすれば、

$$\begin{aligned} S_n &= X_1 + X_2 + \dots + X_n = S_{n-1} + X_n, \quad n = 1, 2, \dots \\ S_0 &= 0 \end{aligned}$$

と表される。 S_n はベルヌイ試行から決まる確率変数

$$P(X_n = 1) = 1 - P(X_n = -1) = p$$

と直前の状態 S_{n-1} との和なので、 $\{S_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ は 2 項過程同様、マルコフ連鎖になる。

5.2.1 推移確率行列

状態推移確率を行列にまとめたものを推移確率行列という。すなわち、 i 行 k 列の要素を $p_{ik} = P(X_{n+1} = k \mid X_n = i)$ とする行列を推移確率行列という。

$$P = (p_{ik})$$

推移確率行列は、正方行列、すべての要素が非負、行和が 1 という性質がある。一般に各要素が非負、行和が 1 であるような正方行列を確率行列という。

$$p_{ik} \geq 0, \sum_k p_{ik} = 1$$

逆に、任意の確率行列が与えられると、それを推移確率行列とするマルコフ連鎖を考えることが出来る。

$X_0 = i$ という条件の下で、 n ステップ推移後に状態 k にいるという条件付き確率を n ステップ推移確率という。

$$p_{ik}^{(n)} = P(X_n = k \mid X_0 = i)$$

また、推移確率行列のように、それらを行列の形にまとめたものを n ステップ推移確率行列という。すなわち、 i 行 k 列の要素を $p_{ik}^{(n)}$ とする行列を n ステップ推移確率行列といい、 $P^{(n)}$ と記す。

$$P^{(n)} = \left(p_{ik}^{(n)} \right)$$

n ステップ推移確率行列も確率行列になる。(正方行列、すべての要素が非負、行和が 1)

例 5.3 パラメータ p の 2 項過程では

$$p_{ik}^{(n)} = \binom{n}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n-(k-i)}, \quad k = i, i+1, \dots, i+n$$

5.2.2 チャプマンコルモゴロフの等式

命題 5.1 任意の $n, m \geq 0, i, k \in S$ に対して次の式が成り立つ。

$$P(X_{n+m} = k \mid X_0 = i) = \sum_j P(X_{n+m} = k \mid X_n = j) P(X_n = j \mid X_0 = i)$$

証明は $n+m$ 回推移した後にはどの状態にあるかということを計算するとき、途中の時点 n では必ずどこかの状態に推移しているはずということを利用して全確率の公式を適用すればよい。これをチャプマンコルモゴロフの等式という。

これを n ステップ推移確率行列を使って表せば、

$$P^{(n+m)} = P^{(n)} P^{(m)}$$

$P^{(1)} = P$ という関係を使うと、 n ステップ推移確率行列は普通の (1 ステップ) 推移確率行列の n 乗になることが導かれる。

$$P^{(n)} = P^{(n-1)} P = P^{(n-2)} P^2 = \dots = P^n$$

というわけで、 n ステップ推移確率 (行列) を定義してはみたものの、(1 ステップ) 推移確率行列が与えられれば、それから計算できることが分かった。あとは線形代数の計算のみ。

練習 5.3 P をマルコフ連鎖の推移確率行列とする。もし P^r の各要素がすべて正となるような番号 r があったとすると、 r より大きなすべての数 n に対して P^n の各要素もすべて正となることを示しなさい。

5.2.3 固有値表現

行列の n 乗は対角行列に置き換えてから計算することで簡単になる。行列の対角化は固有値を求めることから始まる。

$$\begin{aligned} |P - \lambda I| &= 0 \\ Px_k &= \lambda_k x_k \end{aligned}$$

P の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ に対する右固有 (列) ベクトルを x_k とすると、もし全ての固有値が単根ならば、対角化可能で、 $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ を X と置けば

$$P(x_1, x_2, \dots, x_m) = (x_1, x_2, \dots, x_m) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_m \end{pmatrix} = X\Lambda \Rightarrow P = X\Lambda X^{-1}$$

と表すことが出来る。したがって、

$$P^n = X\Lambda^n X^{-1} = X \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & & O \\ & \lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_m^n \end{pmatrix} X^{-1}$$

が得られる。どういう場合にこのような表現が可能か、どう計算するか、それが問題。

例 5.4 きれいに解けるのは 2×2 行列くらい。

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

a も b も 0 ならば、対角化されているから、どちらかは 0 でないと仮定する ($a^2 + b^2 > 0$ と仮定する、と書いてもよい)。 P の固有値は $1, 1-a-b$ の二つ、したがって、

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-a-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow P^n &= \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-a-b)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

要素毎に書くと、

$$\begin{aligned} p_{00}^{(n)} &= \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b}(1-a-b)^n \\ p_{10}^{(n)} &= \frac{b}{a+b} - \frac{b}{a+b}(1-a-b)^n \end{aligned}$$

練習 5.4 2 状態のマルコフ連鎖の推移確率行列が次のように書き換えられることを示しなさい。

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-a-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

練習 5.5 2 状態の推移確率行列が以下の式で与えられているものとします。

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

このとき、 n ステップ推移確率を p で表しなさい。

5.2.4 状態確率

条件付き確率ではなく、ある時点の状態の確率を考えることが必要になる場合もある。次のような確率関数を定義する。

$$\pi_k(n) = P(X_n = k)$$

$\pi_k(n)$ を k 番目の要素とするベクトルを $\pi(n)$ と書いて状態 (確率) ベクトルという。

特に時点 0 における状態確率のことを初期状態確率といい、 $\pi(0)$ は初期分布 (あるいは、初期ベクトル) と呼ばれる。マルコフ連鎖は時点 0 から始めることが多いので、こう呼ばれる。

$$\pi_k(0) = P(X_0 = k)$$

これと、 n ステップ推移確率が分かれば、全確率の公式を使って、 n 時点の状態確率を計算することが出来る。

$$\pi_k(n) = P(X_n = k) = \sum_j P(X_n = k \mid X_0 = k) P(X_0 = k) = \sum_j \pi_0(j) p_{jk}^{(n)}$$

あるいは

$$\pi(n) = \pi(0) P^n$$

ずっと昔から動いているマルコフ連鎖 $\{X_n, n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ を扱う場合もある。

5.2.5 状態推移図

状態をノードで表し、 $p_{jk} > 0$ となる状態のペア j, k を矢印で結び、その矢印に p_{jk} を添えたものをマルコフ連鎖の状態推移図という。マルコフ連鎖の動きを見るために、サンプルパスより有効である場合が多い。

マルコフ連鎖の状態推移図を描いて、動きを調べるとき、状態確率の変化はイメージしにくいので、「確率 = 相対度数」とみなして次のような思考実験を考えると良い。状態を表すノードを島と考え、無数の点を島にばらまく。最初に状態 k (の島) にある点の個数を $N_k(0)$ と書いて時点 0 での島 k の人口と呼ぶことにする。

次に、 $N_k(0)p_{kj}$ 個の点を状態 j (の島) に移す、ということをあらゆる k, j の組み合わせについて同時に実行する。思考実験なので、小数点以下の端数は考えなくて良い。実行後の各島にある点の個数を $N_k(1)$ と記す。これは時点 1 での島 k の人口と言って良い。

$$N_j(1) = \sum_k N_k(0) p_{kj} \quad (5.1)$$

このような動きを繰り返す。

最初にばらまいた点の個数を N とすると、時点 n の島 k の相対人口は $N_k(n)/N$ と書ける。これが状態 k の確率、すなわち、ランダムに選んだ人が島 k にいる確率、あるいは初期時点に島 i にいた人が、十分に多数回の移動を繰り返したときにいる島が k である確率、と考えられる。

例 5.5 (ブランドスイッチング) 点の人、島をある商品を買った人、と考えると、島の人口はその銘柄の「シェア」と考えことが出来るので、マルコフモデルは客が気まぐれ (過去の購買行動

とは関係なく、その都度、推移確率によって次に購入する銘柄を決める)によって銘柄(ブランド)を選ぶ、という購買行動によってブランドのシェアがどう変わるかを表現するモデルと思えなくもない。このマルコフ連鎖はブランドスイッチングモデルと呼ばれる。毎月のシェアデータを見て、これをマルコフ連鎖の状態確率と考えた人がいて、ブランドスイッチングモデルが生まれた。

例えば、アサヒ、麒麟、サッポロ、サントリーのビールシェア争いを考える。消費者を代表するエージェントの集団のようなものを考えて、一定間隔で一斉にビールを買うと考える。ブランド志向が強い消費者の多い銘柄(〇〇でなければだめ)の場合は対角要素、つまり同じ銘柄を買う確率、が大きいというように推移確率を設定すればよい。

例 5.6 (ネットサーフィン) M ページがリンク関係で連結したネットワークを構成しているとする。 i 番目のページから j 番目のページにリンクされているとき $l_{ij} = 1$ 、さもなければ $l_{ij} = 0$ とし、 $L_i = \sum_j l_{ij}$ とする(全リンク数、あるいは出次数という)。このネットワークに常時 N 人がアクセスしていると考え、時点 n に i 番目のページをアクセスしている人の数を $N_i(n)$ とする。ネットサーフィンをする人は、確率 q でリンク先のどれかを等確率で選び、確率 $1 - q$ で全ページの中からランダムに選ぶ、と仮定する。そうすると、ブランドスイッチングのモデルと同じように、「次の時点で i ページを訪問する人の数は、今 j ページにいる人のうち、 $q/L_j + (1 - q)/M$ の割合と考えることが出来る。したがって、

$$N_i(n+1) = \sum_j N_j(n) \left(\frac{q}{L_j} + \frac{1-q}{M} \right) = \frac{1-q}{M} + q \sum_j \frac{N_j(n)}{L_j} \quad (5.2)$$

と書くことが出来る。これを繰り返せば、人気の高い(シェアが大きい)ページがどこか計算することが出来る。

例 5.7 (ギャンブラーの破産) ランダムウォークのように隣同士の状態推移を繰り返し、状態 0、あるいは状態 $N(> 0)$ を訪問したら、それ以降は動かない、というモデルを考える。動かないということは確率 1 で自分自身へ推移する、と考えればよい。賭を繰り返すとき、 n 回勝負後のチップの枚数を状態と考えると、このようなモデルになる。状態 0 は破産状態、状態 N は相手(胴元)が破産状態、と考えればよい。ということから、このモデルはギャンブラーの破産モデルと呼ばれる。

最初のチップの枚数がなんであれ、賭を永久に続けるわけにはいかない。破産する確率は 1 回の賭に勝つ確率と最初のチップの枚数によって決定される。その関係を調べたり、破産するまでの推移回数を調べるのが興味の対象。これを島の人口移動に置き換えて考えると、推移を繰り返す内に、島 0 と島 N に分居することになる。普通は負ける確率の方が大きいので、 N が十分に大きければ、なかなか島 N には到達できず、ほとんどの島民は島 0 へ吸収される。

例 5.8 (部品の取り替え) ある機械の部品の状態を定期点検し、不良状態だったら交換する。部品は劣化するので、使用時間が長くなるにつれて交換されやすくなる。したがって、部品の取り替え計画にはマルコフ連鎖モデルは適用できないように思われる。しかし、部品の経過時間を状態にとって過去の履歴を現在の状態に取り込むことにより、マルコフモデル化が可能になる。推移確率は条件付き確率とすればよい。すなわち、 $p_{i,i+1}$ は i 期間使い続けている部品が次の 1 期間も引き続き使用可能である確率、 $1 - p_{i,i+1}$ は次の点検で取り替えられる確率、つまり、寿命

が i 期間以上であるという条件の下で、次の 1 期間内に不良状態になる確率である。

練習 5.6 ギャンブラーの破産モデルの状態推移図を描きなさい。適当な仮定の下で推移確率行列を書きなさい。

練習 5.7 部品取り替えモデルのサンプルパスを描きなさい。部品の寿命の確率関数が $\{0.1, 0.2, 0.3, 0.4\}$ と与えられているとき、推移確率行列を書きなさい。ただし、0.1 とは取り替えて、次の点検時に不良状態が見つかる確率が 0.1 である、というように読むことにします。

5.3 極限確率

5.3.1 極限確率と極限分布

2 状態のマルコフ連鎖の推移確率行列を

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

としたとき、 n ステップ推移確率は

$$\begin{aligned} p_{00}^{(n)} &= \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b}(1-a-b)^n \\ p_{10}^{(n)} &= \frac{b}{a+b} - \frac{b}{a+b}(1-a-b)^n \end{aligned}$$

で与えられる。もし、 $0 < a+b < 2$ ならば、 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $p_{00}^{(n)}, p_{10}^{(n)}$ は (初期状態に依らず) 同じ値に収束する。その極限値を状態 0 の極限確率という。

一般に、マルコフ連鎖 $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ について、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k | X_0 = j) = \pi_k$$

が成り立つとき、 π_k を極限確率、 k 番目の要素を π_k とする確率ベクトルを極限分布という。

2 状態の場合、 $a+b=2$ の場合、 $a=0$ の場合、などいろいろな可能性を考えると、 $p_{00}^{(n)}, p_{10}^{(n)}$ は必ずしも収束するわけではないことが分かる。また、 $a+b=0$ の場合、つまり、推移確率行列が単位行列の場合、初期状態から動かないので、将来は「初期状態に依ら」ないというわけにはいかない。場合分けして調べてみよう。

- $a=0$ ならば、0 から 1 へは移れないので一方通行。したがって、いつかはみんな「状態 0」島の住人になるダロウ。

$$p_{00}^{(n)} = 1, p_{10}^{(n)} = 1 - (1-b)^n$$

たしかにそうになっている。 $b=0$ の場合も同様

- $a=b=0$ ならば、行き来が無いので、島民の割合は最初の割合を保ったまま。極限分布は初期分布のまま変わらない。
- $a+b=2$ ならば、島の住人がいつも全員別の島に移動する。つまり、偶数時点には確実に初期状態に戻るといふ、周期的な動きを繰り返す。したがって、極限分布は存在しない。
- それ以外の場合は、最終的にどちらの状態のいるか、ということは a と b のバランスで決まり、最初にどの島から始めたのか、そんなことはどうでも良くなってしまふ。

5.3.2 相互訪問可能、相互到達可能

推移確率行列の特徴によって、極限分布が存在するかどうか分かる。行列の特徴を言うために、状態の特徴を知ることが必要。

状態推移図上で、矢印を辿って状態 i から状態 k へ到達することが出来る場合、状態 k は状態 i から訪問可能 (あるいは、到達可能) という。状態 k は状態 i から訪問可能で、状態 i は状態 k から訪問可能という場合は、状態 i, k は相互訪問可能 (あるいは、相互到達可能) という。

状態 i と相互到達可能な状態を全て集めた状態の集合を $S(i)$ とする。もちろん、 $S(i)$ は全体の状態空間 S の部分集合。 $S(i)$ の任意の状態と $S(i)$ 以外の任意の状態とは相互訪問可能ではない。なぜならば、もし、 $\exists j \in S(i)$ と $\exists k \in S(i)^c$ が相互訪問可能だとすると、状態 k は状態 j を介して状態 i と相互訪問可能になるので、 $k \in S(i)$ となるべきであり、仮定を満たすような状態は存在しない。この事実は状態空間 S が相互訪問可能という関係でいくつかの部分集合に（直和）分割できることを意味している。

5.3.3 一時的、再帰的

もし、 $S(i)$ の状態から $S(i)$ 以外の状態へ訪問できる（ $p_{jk} > 0$ となるような $j \in S(i)$ と $k \in S(i)^c$ の組み合わせがある）とすると、いつまでも $S(i)$ の状態間だけで推移を続けるわけにいかず、一旦 $S(i)$ の外へ推移してしまうと、元に戻れないため、結局、 $S(i)$ の住民はその内いなくなってしまうと予想される。このような場合、 $S(i)$ の各状態は一時的 transient 状態（かりそめの状態）と呼ばれる。また、 $S(i)$ そのものも一時的状態集合と呼ばれることがある。 P_1 の場合では $S(1) = \{1, 2\}$ が一時的。

$$P_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

逆に、もし、 $S(i)$ の状態から $S(i)$ 以外の状態へ訪問できないとすると、推移はいつまでも $S(i)$ の中で繰り返すことになり、例えば状態 j から出発して、状態 j には戻らない推移をいつまでも続けるわけに行かない。つまり、必ずいつかは自分自身へ戻ることになる。このような状態は再帰的 recurrent 状態と呼ばれる。状態 i が再帰的であるとき、 $S(i)$ は再帰的状态集合と呼ばれることがある。なぜならば、状態 i が再帰的ならば、 $S(i)$ の全ての状態は状態 i と相互訪問可能なので、必然的に再帰的になるからである。 P_2 の場合では、 $S(2) = \{2, 3\}$ が再帰的。

$$P_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$S(i)$ は互いに訪問可能ではあるが、必ず訪問する、というわけでは無いことに注意。たとえば、 $S(i)$ が一時的であるとき、状態 $j \in S(i)$ から最初の推移で $S(i)$ 以外の状態へ推移することもあるかもしれない。その場合、状態 j へは永久に戻って来られないので、 j は再帰的にはならない。

再帰的状态集合 $S(i)$ が、一つの要素だけからなる、つまり $S(i) = \{i\}$ であるとき、状態 i は吸収的 absorbing 状態と呼ばれる。また、吸収状態を含むマルコフ連鎖は吸収的マルコフ連鎖と言われる。

5.3.4 可約、既約

状態空間 S が再帰的状态集合になっているとき、つまり、どの状態も相互訪問可能であるとき、マルコフ連鎖は既約と言い、既約でないものは可約と言う。 P_3 は既約、 P_4 は可約である。

$$P_3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad P_4 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

可約なマルコフ連鎖の場合、お互いに行き来のない状態集合を同時に扱う必要は全くない。たとえば、 P_4 ならば、状態 $0, 1$ だけでマルコフ連鎖となり、状態 $2, 3$ だけで構成されるマルコフ連鎖とは別々に扱えばよい。

既約ならば、どの状態から出発したとしても、十分に推移を繰り返すと、どの状態も多数回（無限回）訪問するようになり、そのうちにどこから出発したのか分からなくなってしまう、ということが予想される。

$$p_{jk}^{(n)} \rightarrow \pi_k \quad (n \rightarrow \infty) \quad \forall j, \forall k$$

したがって、極限分布が存在しそう。

可約の場合は、推移を繰り返して行くと、一時的状態集合に止まる確率は 0 に収束するので、状態集合が有限ならば、必ず一つは再帰的状态集合がある。一旦再帰的状态集合に入ると、その後は既約な連鎖の場合と同じ振る舞いをするはず。したがって、可約なマルコフ連鎖の極限分布を考える場合、一時的状態から出発した場合は、どの再帰的状态集合に最初に推移するか（例えば P_1 のような場合）あるいはいつまで一時的状態に止まるか（例えば P_2 の $\{0, 1\}$ のような場合）を調べることが問題となる。再帰的状态から出発した場合は、その状態が含まれる再帰的状态を小宇宙と考えて、そこでの極限分布を考えればよい（例えば P_2 の $\{2, 3\}$ のような場合）。

5.3.5 周期

ある状態から出発して自分自身へ戻るパスの推移回数を考える。もし、戻ってくるのは必ずある整数 m の倍数回推移を繰り返した後、という場合は、周期がある、あるいは周期的 cyclic、といい、そのような整数 m の最大値をその状態の周期という。最大値が 1 の場合は非周期的という。

状態 i が周期 m を持ち、状態 k は状態 i と相互訪問可能ならば、状態 k の周期も m になる。状態 i と状態 k を含む推移のループを描いてみれば、その推移回数は m の倍数になっているはず、ということを使えば説明できるはず。したがって、もしマルコフ連鎖が既約で、ある状態が周期的でその周期が m ならば、どの状態も周期的で、周期は m になる。したがって、この場合はマルコフ連鎖が周期的である、という言い方をする。 P_5 の場合、状態 0 は周期的で、その周期は 2、連鎖は既約なので、この連鎖そのものが周期的、周期は 2。

$$P_5 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

初期状態を 0 として P_5 にしたがって推移を繰り返すと、奇数回推移後には必ず状態 2 か 3、

偶数回推移後には必ず状態 0 か 1 となり、いつまで経っても収束することはない。したがって、極限分布は存在しそうにない。

5.3.6 再帰時間

極限分布の存在には、自分自身に戻ってこられるかどうかの問題。再帰の状態、一時的状態は、数学的には再帰時間を使って定義される。状態 k から出発して ($X_0 = k$) 初めて状態 k に戻るまでの推移数 (≥ 1) を状態 k の再帰時間 recurrence time といい、 $T(k)$ と表す。

$$T(k) = \{n; X_1 \neq k, X_2 \neq k, \dots, X_{n-1} \neq k, X_n = k \mid X_0 = k\}$$

$T(k)$ が確率 1 で有界である時、状態 k は再帰的という。

$$P(T(k) < \infty) = 1$$

状態 k が再帰的ならば、自分自身に何回でも戻ってこられる。

再帰的でない状態は一時的という。

$$P(T(k) < \infty) = R_k < 1$$

状態が一時的ならば、ある状態から出発して自分自身に戻ることを成功とするようなベルヌイ試行を考えることが出来る。そのパラメータが R_k 。従って、状態 k から出発して状態 k に戻る回数はパラメータ $1 - R_k$ の幾何分布に従う (戻る回数が有限回)。

状態数が有限のマルコフ連鎖では、すべての状態が相互訪問可能、すなわち、既約ならば、すべての状態は再帰的。なぜならば、確率 1 で自分自身に戻る事が出来るから。無限状態も含めて、すべての状態が再帰的なマルコフ連鎖は再帰的マルコフ連鎖と呼ばれる。

例 5.9 2 状態のマルコフ連鎖の場合、 $p_{01} = a, p_{10} = b$ とすると、

$$\begin{aligned} P(T(0) = n) &= a(1-b)^{n-2}b, \quad n = 2, 3, \dots \\ P(T(0) = 1) &= 1 - a \end{aligned}$$

と与えられる。 $P(T(0) < \infty) = 1$ なので、 $b > 0$ ならば、状態 0 は再帰的、 $a > 0, b = 0$ ならば一時的。

練習 5.8 次の推移確率行列で定義されるマルコフ連鎖が周期 2 を持つ周期的連鎖であることを示しなさい。また、状態 0 の再帰時間の分布を計算しなさい。

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-p \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.3.7 再帰性の判定

再帰時間 $T(k)$ の確率関数を

$$r_n = P(T(k) = n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする。再帰時間の分布を直接求める代わりに、 n ステップ推移確率を使って間接的に求める方法を考える。自分自身に戻る確率は、最初に戻ってくる時点で層別して考えることで、分解して考えることができる（再帰的議論）

$$P(X_n = k | X_0 = k) = \sum_{m=1}^n P(X_n = k | T(k) = m) P(T(k) = m | X_0 = k)$$

$$\Rightarrow p_{kk}^{(n)} = \sum_{m=1}^n r_m p_{kk}^{(n-m)}$$

次のような母関数を考える。

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{kk}^{(n)} z^n, H(z) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n z^n$$

上の式の両辺に z^n を掛けて $n = 1, 2, \dots$ について和を取ると、

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{kk}^{(n)} \times z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (r_m z^m) (p_{kk}^{(n-m)} z^{n-m})$$

$$\Rightarrow G(z) - 1 = G(z)H(z) \iff G(z) = \frac{1}{1 - H(z)}$$

状態 k が再帰的ということは $T(k)$ が通常の変数、すなわち確率関数の和が 1 になるということなので、それを母関数で表現すると、 $H(1) = 1$ 、ということは

$$H(1) = 1 \Leftrightarrow G(1) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{kk}^{(n)} = \infty$$

したがって、 n ステップ推移確率を計算することによって、再帰性が判定できる。

5.3.8 平均再帰時間

状態 k を出発して初めて状態 k に戻るまでの時間は確率的に変動するが、平均的に 3 回で戻る、ということであれば、1 回に 1 回は状態 k を訪問しているのだから、全体の 3 分の 1 は状態 k にいる、つまり、状態確率は 3 分の 1 に近づくのではない、つまり、平均再帰時間と極限確率は関係がありそう。状態確率は平均再帰時間の逆数になるのだろうか？

n ステップ推移後に状態 k にいれば 1、さもなければ 0 という確率変数 Z_n を定義する。

$$Z_n = \begin{cases} 1, & \text{if } X_n = k | X_0 = k \\ 0, & \text{if } X_n \neq k | X_0 = k \end{cases}$$

$\sum_{n=0}^N Z_n$ は N 回の推移で状態 k を訪問した回数なので、 N をそれで割ると、状態 k の平均訪問間隔になる。それを平均再帰時間 $E(T(k))$ に他ならない。それを m_k と記す

$$m_k = E(T(k)) \approx \frac{N}{\sum_{n=0}^N Z_n}$$

ところで、

$$E(Z_n) = P(X_n = k | X_0 = k) = p_{kk}^{(n)}$$

なので、

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{kk}^{(n)} = \infty \Leftrightarrow E\left(\sum_{n=0}^{\infty} Z_n\right) = \infty$$

もし、極限分布があるならば $p_{kk}^{(n)} \rightarrow \pi_k$ 、したがって、

$$\frac{\sum_{n=0}^N p_{kk}^{(n)}}{N} \rightarrow \pi_k$$

これより、 π_k は平均再帰時間 m_k の逆数になることが分かる。

練習 5.9 練習 5.8 において、各状態の平均再帰時間を計算しなさい。

練習 5.10 状態が再帰的ならばその状態の生涯訪問回数は無限になることをわかりやすく説明しなさい。

練習 5.11 状態 k に初めて戻るまでの推移数を $T(k)$ としたとき、次の式が成り立つことを示しなさい。

$$P(X_n = k \mid X_0 = k) = \sum_{m=1}^n P(X_{n-m} = k \mid X_0 = k) P(T(k) = m \mid X_0 = k)$$

練習 5.12 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{kk}^{(n)}$ が状態 k の生涯訪問回数の期待値であることを示しなさい。

5.3.9 零再帰的、正再帰的

例えば、左右対称なランダムウォークでは、どんな状態もお互いに行き来が出来るので既約となる。状態 0 が再帰的であることを確かめるために、 $p_{00}^{(2n)}$ の和が発散することを確認する。 $2n$ ステップ後に自分自身に戻るためにはプラスが n 回、マイナスが n 回出現することが必要、従って

$$p_{00}^{(2n)} = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

スターリングの公式

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

を適用して近似計算すると

$$p_{00}^{(2n)} \approx \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}}{n^{2n} e^{-2n} \times 2\pi n} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

従って、確かに $p_{00}^{(2n)}$ の和は発散する。また、 $p_{00}^{(2n)} \rightarrow 0$ なので、平均再帰時間は無限大。

再帰的で、平均再帰時間が有限の場合、その状態を正再帰的、無限の場合は零再帰的という。状態が有限ならば零再帰的ではあり得ない。

練習 5.13 左右対称なランダムウォークで $n \gg 1$ のとき、スターリングの公式を適用して $p_{00}^{(2n)} \approx (n\pi)^{-0.5}$ が成り立つことを示しなさい。

5.3.10 基本定理

マルコフ連鎖の状態 k の極限確率

$$\pi_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_k(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k \mid X_0 = j)$$

を k 要素とする極限分布ベクトルについて、次の定理が成り立つ。

定理 9 マルコフ連鎖が既約で非周期的、かつ（正）再帰的ならば極限分布が存在する。

練習 5.14 2 状態のマルコフ連鎖で、既約でないモデル、非周期的でないモデル、再帰的でないモデルを作り、それぞれ極限確率が存在しないことを確かめなさい。

練習 5.15 推移確率行列が 2 重確率行列であるとは、各列の要素の和が 1 になっていること、すなわち、下の式が成り立つことを言います。

$$\sum_j p_{jk} = 1$$

このような推移確率行列を持つ連鎖が既約で非周期的ならば、その状態数を M としたとき、極限分布が以下で与えられることを示しなさい。

$$\pi_k = \frac{1}{M}, \quad k = 1, 2, \dots, M$$

練習 5.16 粒子が円周上に並んだ 5 点の間を行ったり来たりするものとする。5 つの点は時計回りに 0, 1, 2, 3, 4 という番号が付けられているものとする。1 回につき、確率 p で右へ（時計回り）、 $1 - p$ で左へ（反時計回り）動くものとする。 X_n を n 回目の移動の後の粒子の位置を表すものとする、 $\{X_n, n \geq 0\}$ はマルコフ連鎖になります。

- (1) 推移確率行列を求めなさい。
- (2) 極限確率を計算しなさい。

5.4 定常解析

5.4.1 平衡方程式と定常分布

極限確率が存在するならば

$$p_{ik}^{(n+1)} = \sum_j p_{ij}^{(n)} p_{jk}$$

で $n \rightarrow \infty$ とすれば

$$\pi_k = \sum_j \pi_j p_{jk}$$

が導かれる。この連立方程式は平衡方程式と呼ばれる。ここで (π_k) は確率ベクトル、つまり、要素の合計が 1 となるような非負の実数であるようなベクトルである。平衡方程式の解をそのマルコフ連鎖の定常分布 (stationary distribution) という。

もし、初期分布 $\pi(0)$ として定常分布を与えると、1 回推移後の確率分布 $\pi(1)$ 、2 回推移後の確率分布 $\pi(2)$ 、... は全て同じ分布になる。このように、状態の確率分布が推移を繰り返しても変わらないという状態を定常状態 steady state という。

練習 5.17 次の推移確率行列を持つマルコフ連鎖の定常分布を計算しなさい。

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p & 1-p \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.4.2 定常分布と極限分布

既約なマルコフ連鎖で極限分布が存在するとき、それを定常分布と名付けたが、定常分布そのものを見いだすには、無限の推移を必要とせず、平衡方程式を解くことによって得られることが分かった。ということは、極限分布が存在しなくても、定常分布が存在する可能性がある。実際、2 状態のマルコフ連鎖で、各時点毎に、確実に別の状態に移る、という動きをするものは、対角要素が 0 の推移確率行列を持った周期 2 のマルコフ連鎖になり、極限分布は存在しないが、平衡方程式を立てれば、 $(0.5, 0.5)$ が解であることを確認することが出来る

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5.4.3 平均再帰時間と定常確率

平均再帰時間は生涯訪問回数を使って計算できることが分かっている。もし、極限分布が存在するならば、数列の収束の一般的な理論を適用して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{kk}^{(n)} = \pi_k \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=0}^m p_{kk}^{(n)} = \pi_k$$

ここで、 $\sum_{n=0}^m p_{kk}^{(n)}$ は m 回の推移の間に状態 k を訪問する回数の期待値であることから、それを m で割ったものは、 m が十分に大きければ平均訪問間隔 (再帰時間) の逆数となる。したがって、定常確率は平均再帰時間の逆数という公式が導かれた。

$$\pi_k = \frac{1}{E(T(k))}$$

直感的に言えば、平均 5 回に 1 回戻るならば、定常確率は 5 分の 1、ということ。

5.4.4 「平衡」の解釈

島民の移動というたとえを使って説明すると「平衡」方程式を直感的に理解することが容易。島 k に N_k 人いる状態を考える。次の推移で、島 k の人口 N'_k は $\sum_i N_i p_{ik}$ になる。もし、移動によっても島の人口比率はあまり変わらないとすれば

$$N_k \approx \sum_i N_i p_{ik}$$

が成り立つ。もし、最初に $N_k = N \pi_k$ 人いたとすると、平衡方程式を使って

$$\sum_i N_i p_{ik} = N \sum_i \pi_i p_{ik} = N \pi_k$$

と書き換えられるので、 $N'_k = N \pi_k = N_k$ 、つまり推移しても人口は変わらない、ということが言える。島民の中身は一人一人違ってても数から言えば不変、島を離れる人の数と、新たに入ってくる人の数が同じ、つまり人口は平衡を保っていることになる。これが「平衡」方程式の意味。

この「平衡」は一つの島だけでなく、いくつかの島をまとめて、その群島からの出入りを考えても平衡を保っていることが分かる。 A を状態（島）のある部分集合（群島）、 A^c をその補集合として、上と同じ記号を使うと、 A 群島から離れる島民の数は

$$\sum_{i \in A} \sum_{k \in A^c} N_i p_{ik} = N \sum_{i \in A} \sum_{k \in A^c} \pi_i p_{ik}$$

逆に A 群島に新たに移住してくる人口は

$$\sum_{i \in A^c} \sum_{k \in A} N_i p_{ik} = N \sum_{i \in A^c} \sum_{k \in A} \pi_i p_{ik}$$

となり、人口が定常状態にあるならば次の式が成り立つ。

$$\sum_{i \in A} \sum_{k \in A^c} \pi_i p_{ik} = \sum_{i \in A^c} \sum_{k \in A} \pi_i p_{ik}$$

練習 5.18 Excel を使って、次の推移確率行列を持つマルコフ連鎖の極限分布を計算しなさい。また、定常方程式を解いて、それが極限分布と一致することを確認しなさい。

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.99 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.99 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.99 & 0.01 \\ 0.01 & 0 & 0 & 0.99 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.69 & 0.3 & 0 & 0.01 \end{pmatrix}$$

練習 5.19 従業員が N 人いる企業で、個々の従業員は三つのジョブクラスに分かれていて、クラス間をマルコフ連鎖にしたがってたがいに独立に移動しているものとする。その推移確率行列は次で与えられているものとする。

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$$

N は十分に大きいものとして、各クラスの従業員数の比率を計算しなさい。

練習 5.20 道路を走っているトラックの後ろを走っている車は 4 台中 3 台は普通の乗用車、乗用車の後ろを走っている車は 5 台中 1 台がトラックであった。走っている乗用車とトラックの割合はどれくらいと考えればよいか。

練習 5.21 ある町では 2 日と続けて晴れたことがない。天気の種類は晴れ、曇り、雨の 3 通りとする。晴れの日の次は曇りと雨が等確率で起き、曇り、雨の次の日は 2 分の 1 の確率で前日と同じ天気となり、天気が変わるとすれば残りの二つの可能性が等確率で起きるといふ。曇りの比率はどれくらいですか。

練習 5.22 定常分布が存在すると、任意の状態集合 A に対して、次の等式が成り立つことを説明しなさい。

$$\sum_{i \in A} \sum_{k \in A^c} \pi_i p_{ik} = \sum_{i \in A^c} \sum_{k \in A} \pi_i p_{ik}$$

5.5 吸収的マルコフ連鎖

5.5.1 吸収的マルコフ連鎖 (absorbing Markov chain)

自分以外の状態へ推移する確率が 0 という状態を吸収状態といい、吸収状態以外はすべて一時的であるようなマルコフ連鎖を吸収的マルコフ連鎖という。「破産」とか「故障」とか「品切れ」とか、ある特定の状態に達するまでにどういう経路をたどるのか、どれくらいの時間がかかるのか、というようなことを分析するためのモデル。

5.5.2 一段階推移解析法 (first-step analysis)

最初の推移で世界がどう変わるのか、ということを調べることによって、将来の動きを予測しよう、という考え方。マルコフ性があるので、最初の推移のあとは、あたかもそこが初期の状態と思って再スタートすると考えてもよく、再帰的な考え方が可能になる。全確率の公式の応用。

$$P(A | X_0 = k) = \sum_j P(A | X_1 = j)P(X_1 = j | X_0 = k) = \sum_j p_{kj}P(A | X_1 = j)$$

$$E(Z | X_0 = k) = \sum_j p_{kj}E(Z | X_1 = j)$$

上の式で事象 A あるいは確率変数 Z の条件付き確率が時間をずらしても変わらない、あるいは時間をずらした量と簡単な関係があるとすれば、 $P(A | X_0 = k), E(Z | X_0 = k)$ の連立方程式になる。たとえば「いつかは」破産するという事象を A とすれば、 $P(A | X_0 = k) = P(A | X_1 = k)$ 、破産するまでの時間を Z とすれば、 $E(Z | X_1 = k, X_0 = i) = 1 + E(Z | X_0 = k)$

例 5.10 次の推移確率行列を持つ吸収的マルコフ連鎖で、

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1-p & p \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

吸収されるまでの時間を T とすると、

$$E(T | X_0 = 0) = 1 + (1-p)E(T | X_0 = 0)$$

したがって、 $E(T | X_0 = 0) = p^{-1}$ が成り立つ。

例 5.11 (ギャンブラーの破産モデル) 勝つ確率が p 、1 マンエンずつやりとりする。 n 回勝負後の所持金 X_n 、 A は自分が先に破産するという事象とすると、

$$P(A | X_0 = k) = p \times P(A | X_1 = k+1) + (1-p)P(A | X_1 = k-1)$$

$$\Leftrightarrow Q_k = pQ_{k+1} + (1-p)Q_{k-1}$$

練習 5.23 次の推移確率行列を持つ吸収的マルコフ連鎖で、状態 1 から出発して状態 0 に吸収される確率を一段階推移解析法を用いて計算しなさい。

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & q & 1-p-q \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.5.3 推移行列の基本形

一時的状態を最初に、吸収状態をその後に並べる、というようにして状態推移行列を書き直すと

$$P = \begin{pmatrix} Q & R \\ O & I \end{pmatrix}$$

となる。 I は単位行列、 O は要素が全部 0 の行列、 R はすべての要素が 0 ではない行列、つまり、 Q は行和が 1 未満となるような行が少なくとも一つはある、というように分解できる。

5.5.4 吸収方程式

一時的状態の集合を T 、吸収状態の集合を A とする。 $j \in T, k \in A$ に対して、一時的状態 j から出発していつかは吸収状態 k に吸収される確率を計算したい。一段階推移解析を適用すると、

$$\begin{aligned} P(X_\infty = k \mid X_0 = j) &= \left(\sum_{i \in T} + \sum_{i \in A} \right) p_{ji} P(X_\infty = k \mid X_1 = i) \\ &= \sum_{i \in T} p_{ji} P(X_\infty = k \mid X_0 = i) + p_{jk} \end{aligned}$$

$P(X_\infty = k \mid X_0 = j) = a_{jk}$ とすると、

$$a_{jk} = \sum_{i \in T} p_{ji} a_{ik} + p_{jk}$$

$A = (a_{jk})$ とすると、

$$A = QA + R$$

したがって、

$$A = (I - Q)^{-1}R$$

おしまい。 A の行和は 1。つまり、ある一時的状態から出発して最終的にどの状態に吸収されるか、ということを表す確率ベクトルになっている。

5.5.5 基本行列

上の $I - Q$ の逆行列 $(I - Q)^{-1}$ を基本行列という。なぜ「基本」か？あらゆるところに顔を出すから。逆行列は存在するか。

$$A = QA + R$$

を繰り返し適用すると、

$$\begin{aligned} A &= Q(QA + R) = Q(Q(QA + R) + R) + R = \dots \\ &= (I + Q + Q^2 + \dots)R \end{aligned}$$

両辺に左から $I - Q$ を掛ければ

$$(I - Q)(I + Q + Q^2 + \dots) = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - Q^n) = I$$

最後の等式は、 $|r| < 1$ のとき $r^n \rightarrow 0$ となるようなもの。詳しくは固有値の議論。したがって

$$A = (I - Q)^{-1}R$$

5.5.6 吸収されるまでの時間

吸収されるまでの時間を T とすると、その期待値に関してやはり一段階推移解析を適用して計算することができる

$$\begin{aligned} E(T \mid X_0 = j) &= \left(\sum_{i \in T} + \sum_{i \in A} \right) p_{ji} E(T \mid X_1 = i) \\ &= 1 + \sum_{i \in T} p_{ji} E(T \mid X_0 = i) \end{aligned}$$

$t_j = E(T \mid X_0 = j)$ において、それを要素とするベクトルを t 、すべての要素が 1 のベクトルを $\mathbf{1}$ とすると、

$$t = \mathbf{1} + Qt$$

したがって、

$$t = (I - Q)^{-1} \mathbf{1}$$

と、ここでも基本行列が出てくる。

練習 5.24 推移確率行列が以下のように与えられるマルコフ連鎖を考える。ただし、 Q は m 次正方行列、 I は k 次単位行列とする。このとき、 n ステップ推移確率 P^n を計算しなさい。

$$P = \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

練習 5.25 (数学の問題) 正方行列 Q で、各要素は非負、行和が 1 以下で少なくとも行和が 1 未満の行があるようなものとする。このとき、 $I + Q + Q^2 + Q^3 + \dots$ の逆行列が $(I - Q)^{-1}$ であることを示しなさい。

練習 5.26 勝つ確率が p の賭を繰り返し行う。最初に与えられたチップは 1 枚、相手は 2 枚、毎回チップを 1 枚ずつ賭けて、勝った方が場の 2 枚のチップを獲得する。で、どちらかのチップが無くなったら 1 回の勝負が終わり、3 枚のチップを集めた方が相手から A 円受け取る。この勝負を倦まず弛まず続けるものとする。

(0) 自分のチップの枚数の変化をサンプルパスで表しなさい。また、累積獲得賞金額のサンプルパスを描きなさい。

- (1) 1 回の勝負で自分が勝つ確率を計算しなさい。
- (2) 1 回の勝負が付くまでに行う賭の回数を計算しなさい (分布と平均)。
- (3) 1 回の勝負で自分が獲得する賞金の期待値を計算しなさい。
- (4) 賭が公平であるためには勝つ確率が p をいくつにすればよいですか。
- (5) 勝つ確率 p が 2 分の 1、つまり、ゆがみのないコインを使って賭をするものとします。このとき、1 回コインを投げる毎に、平均いくら損することになりますか。

練習 5.27 状態が $0, 1, \dots, N$ の既約なマルコフ連鎖を考える。

- (1) 状態 j から出発して、いつかは状態 k を訪問する確率はいくつですか。それはなぜですか。
- (2) 状態 j から出発したという条件の下で、状態 0 を訪問する前に状態 N を訪問する確率を x_j としたとき、 $x_j, j = 0, 1, \dots, N$ が満たす連立方程式を導きなさい。

(3) もし $\sum_k k p_{jk} = j, j = 1, 2, \dots, N-1$ ならば、(2) の解は $x_k = k/N$ と表されることを証明しなさい。

練習 5.28 インフルエンザの感染モデル。 n_0 個の赤い玉と、 $N - n_0$ 個の白い玉を用意します。ランダムに二つの玉を取り出し、二つの玉の色が同じならばそのまま元に戻し、さもなければ、確率 q で白い玉を赤く塗り替えて元に戻すものとします。赤い玉が感染者を表し、二つの玉を取り出すことはランダムに2人が出会うことを表し、色を塗り替えるということはある確率で感染するということを表しています。 n_0 は最初の保菌者の数を表します。 X_n を n 回の試行後の赤い玉の個数を表すものとする、 $\{X_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$ は吸収的マルコフ連鎖になることを示し、 $X_0 = 1$ から始めて全員が感染するまでに何ステップかかるか計算しなさい。

5.6 分枝過程 branching process

先祖代々伝わる家系図、その消長には興味深いものがある。名前を消して眺めてみると、ルートから順番に枝分かれして行く樹状図 tree を見る事が出来る。枝の数は、分岐毎に異なる。そのような家系図を無数に集めて特定の名前を消し、木の枝分かれのパターンだけに注目すると、その枝分かれは確率モデルとして定式化することが出来るかもしれない。それが次に定義する分枝過程である。

$Y_{jk}(j = 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots)$ を非負整数値を取る、独立同分布に従う確率変数として、その確率関数を以下のように定義する。

$$P(Y_{jk} = m) = p_m \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

それらを用いて、離散時点確率過程 $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} X_0 &= 1 \\ X_{n+1} &= Y_{n1} + Y_{n2} + \dots + Y_{n, X_n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

このとき、 $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ は分枝過程 branching process と呼ばれる。 n は「世代」、 X_n は n 世代の「人口」あるいは「個体数」ということがある。

X_k を k 世代の（生殖可能）人口、 Y_{ki} を k 世代の i 番目の個体が残す次世代（生殖可能）子孫の数、と考えると、 $X_0 = 1$ から始めて、 n 世代後に個体数はどれくらいになるか、ということ进行分析するためのモデルと考えることが出来る。どの世代のどの個体も残す子孫の数は同じ規則に従うとか、互いに独立とか、かなり単純化されたモデルになっているが、この分枝過程モデルを使ってアメリカ合衆国の姓の数の増減を調べた例がある。

分枝過程では、 n 世代の人口の確率分布を求めることが目的であるが、それに基づいて、 $n \rightarrow \infty$ としたときどうなるのか、 $X_n \rightarrow 0$ とならないのはどういう場合か、 $X_n = 0$ 、つまり家系が絶滅するのはいつか？を調べるのが興味の対象。

ある個体が残す子孫の数 Y の確率分布 $\{p_0, p_1, p_2, \dots\}$ に関して、もし $p_0 = 0$ だとすると、子孫は決して途絶えることはない。従って単調非減少。 $p_0 + p_1 = 1$ とすると、子孫は 1 より増えることがない。したがって、単調非増加、というよりは、どこかで 0 になるまで、ずっと 1 のまま。そこで、つまらない問題を排除するために、次の仮定を置く

$$\begin{aligned} p_0 &> 0 \\ p_0 + p_1 &< 1 \end{aligned}$$

5.6.1 各世代の人口の期待値

$\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ はその定義から、直前の値と、その場で決まる独立な確率変数によって決定されるので、非負整数値を取るマルコフ連鎖となる。またそれは、状態 0 を吸収状態とする吸収的マルコフ連鎖でもある。子の数が 2 以上になる確率が正なので、 $n \rightarrow \infty$ のとき、 X_n はいくらでも大きくなる可能性があるし、子の数が 0 の確率が正なので、いつでも絶滅する（吸収される）可能性がある。

n 世代の個体数 X_n の期待値は、前の世代の個体数で条件を付けて考えると、次のように、全確率の公式による計算で求めることが出来る。

$$E(X_n) = E(E(X_n | X_{n-1})) = E(X_{n-1})E(Y)$$

この式を繰り返し適用することにより、 n 世代の個体数 X_n の期待値は、ある個体が残す子の数 Y の期待値 $m = E(Y)$ を使って次の式のように表される。

$$E(X_n) = m^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

子孫の数の平均が 1 未満ならば、つまり、縮小再生産ならば、個体数の期待値は 0 へ向かい、1 より大きければ人口は「平均的にみて」爆発する。しかし、どんなに人口が増えても、すべての個体が同時に子孫を残さないという可能性は 0 では無いので、常に絶滅の危険を孕みながらも「平均的には」爆発する、という意味である。

子孫の数の平均がちょうど 1 の場合は、絶滅する確率 $P(X_n = 0)$ は単調に増え続けながらも、その期待値は 1 のままという奇妙なふるまいになる。サンプルパス、つまり樹状図をたくさん書いてみると、絶滅するサンプルがどんどん増えているのに、平均的には生き残りの子孫の数が増えない、ということは、生き残った家系は無限に繁栄する、ということにしないと、勘定が合わない。出回っているお金の額が同じだとすると、投資家の大部分は破産、少数の大金持ちがますます大金持ちになるという、株式売買のモデルになっている？

練習 5.29 $E(X_n) = E(Y)^n$ となることを証明し、 $P(Y = 0) = p, P(Y = 1) = 0.5, P(Y = 2) = 0.5 - p (0 < p < 0.5)$ のとき、いろいろな p の値に対して $E(X_5), E(X_{10}), E(X_{20})$ を計算しなさい。

5.6.2 絶滅確率

子孫を残さない確率が 0 で無いかぎり、いつかは家系が途絶える可能性がある。その確率、絶滅確率、を計算する。 n 世代における絶滅確率を

$$\alpha_n = P(X_n = 0 | X_0 = 1)$$

と置くと、各親世代は独立に子孫を残すので、 $X_0 = k$ とした場合は計算が増えるだけで、複雑にはならない。

$$P(X_n = 0 | X_0 = k) = \alpha_n^k$$

最初に子孫を残さなければ、それで絶滅、つまり

$$\alpha_1 = p_0$$

2 世代で絶滅する確率は 1 世代目のすべての個体が子孫を残さない（絶滅する）という場合なので、1 世代目の個体の数で条件を付けて考えればよい

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_2 = 0 \mid Y_{11} = k, X_0 = 1) P(Y_{11} = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P(Y_{21} + Y_{22} + \cdots + Y_{2k} = 0) P(Y_{11} = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} p_0^k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_1^k p_k
\end{aligned}$$

最右辺は Y の確率母関数

$$G_Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \times z^n$$

を使って $G_Y(\alpha_1)$ と表すことが出来る。この考え方を一般化すると、

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_n = 0 \mid Y_{11} = k, X_0 = 1) P(Y_{11} = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} p_k P(X_{n-1} = 0 \mid X_0 = 1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (\alpha_{n-1})^k = G_Y(\alpha_{n-1})
\end{aligned}$$

二番目の等式は、1 世代目の個体のそれぞれが分家して新たな家系を創設したと考えれば頷ける。具体的な値が知りたければ、 $\alpha_1 = p_0$ を初期値として順番に計算するだけ。

練習 5.30 $P(Y = 0) = 0.25, P(Y = 2) = 0.75$ のとき、 $n = 1, 2, 3, 4$ 世代目の絶滅確率を計算しなさい。

絶滅確率が $n \rightarrow \infty$ としたときにどうなるか、ということが次の関心事になる。 $\{\alpha_n\}$ は 1 以下、世代が進行するにつれて単調に増加するだろうから、ある一定値に収束することが期待できる。実際、増加数列であることは次のように確かめられる。

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= P(X_n = 0 \mid X_0 = 1) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_n = 0 \mid X_{n-1} = k) P(X_{n-1} = k \mid X_0 = 1) \\
&= \alpha_{n-1} + \sum_{k=1}^{\infty} p_0^k P(X_{n-1} = k \mid X_0 = 1) \geq \alpha_{n-1}
\end{aligned}$$

その収束値、つまり最終的な絶滅確率を α とおく。

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$$

$\alpha_n = G_Y(\alpha_{n-1})$ で、 $n \rightarrow \infty$ とすれば、絶滅確率 α は次の式を満たす。

$$\alpha = G_Y(\alpha)$$

このような方程式を満たす α は関数 $G_Y(z)$ の不動点と呼ばれる。例えば $\alpha = 1$ が不動点であることは $G_Y(z)$ が確率母関数であることから分かる。

$G_Y(z)$ ($0 \leq z \leq 1$) の不動点は高々二つしかないことが、その関数の形状を調べることによって分かる。実際、 $G_Y(z)$ は (1) 単調増加 ($G_Y'(z) > 0$)、(2) 下に凸 ($G_Y''(z) > 0$)、(3) $G_Y(0) = p_0 > 0, G_Y(1) = 1$ 、だからである。

最小の不動点を α^* とすると、グラフを描いてみれば分かるように、

$$\alpha^* \begin{cases} = 1 & \text{if } G'_Y(1) \leq 1 \\ < 1 & \text{if } G'_Y(1) > 1 \end{cases}$$

となる。 $G'_Y(1)$ は一つの個体が残す子孫の数の平均を表していることに注意すると、この結果はもっともらしい。つまり、ある個体が残す子の数の期待値が 1 以下ならばいつかは必ず絶滅し、さもなければ、無限に繁殖する可能性が残される。必ず絶滅するわけではない、ということであって、期待値がどんなに大きくても、確実に繁殖するというわけではないことに注意。つまり、平均子孫数が 1 より大きいということは、繁殖のための必要条件。 $1 - \alpha^*$ は人口が爆発する確率になる。

5.6.3 個体数

個体数の確率分布は確率母関数を使って計算できる。 n 世代目の個体数 X_n の確率母関数を

$$G_n(z) = E(z^{X_n}) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(X_n = k)$$

と置くと、前の世代の個体数で条件を付けて計算することが出来る。

$$\begin{aligned} G_n(z) &= E(z^{X_n}) = E(E(z^{X_n} | X_{n-1})) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{n-1} = k) E(z^Y)^k = \sum_{k=0}^{\infty} G_Y(z)^k P(X_{n-1} = k) \\ &= G_{n-1}(G_Y(z)) \end{aligned}$$

$G_Y(z)$ は一つの個体が残す子の数 Y の確率母関数である。これを使えば「原理的に」各世代の個体数の確率分布が計算できる。

練習 5.31 (1) $P(Y = 0) = 0.25, P(Y = 2) = 0.75$ のとき、絶滅確率はどうなるか予想しなさい。 $\alpha = G_Y(\alpha)$ を解いて $0 < \alpha^* < 1$ の根があれば求めなさい。予想通りでしたか。

(2) $P(Y = 0) = 0.75, P(Y = 2) = 0.25$ のとき、絶滅確率はどうなるか予想しなさい。 $\alpha = G_Y(\alpha)$ を解いて $0 < \alpha^* < 1$ の根があれば求めなさい。予想通りでしたか。

(3) $G'_Y(1) > 1$ ならば絶滅確率は 1 より小さく、 $G'_Y(1) \leq 1$ ならば確実に絶滅する、ということを証明しなさい。これが何を意味するのかを説明しなさい。

期待値、分散は微分を使って計算できる。

$$M_n = E(X_n) = G'_n(1), L_n = E(X_n(X_n - 1)) = G''_n(1)$$

と置く。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} G_n(z) &= \frac{d}{dz} G_{n-1}(z) \frac{d}{dz} G_Y(z) \\ \frac{d^2}{dz^2} G_n(z) &= \frac{d^2}{dz^2} G_{n-1}(z) \left(\frac{d}{dz} G_Y(z) \right)^2 + \frac{d}{dz} G_{n-1}(z) \frac{d^2}{dz^2} G_Y(z) \end{aligned}$$

ここで、

$$m = E(Y), v = V(Y)$$

と置くと

$$E(X_n) = M_n = M_{n-1} \times m = m^n$$

次いで、

$$\begin{aligned} L_n &= m^2 L_{n-1} + (v + m^2 - m)m^{n-1} \\ &= m^2 (m^2 L_{n-2} + (v + m^2 - m)m^{n-2}) + (v + m^2 - m)m^{n-1} \\ &= m^4 \times L_{n-2} + (v + m^2 - m)m^n + (v + m^2 - m)m^{n-1} = \dots \\ &= (v + m^2 - m)m^{n-1} \frac{m^n - 1}{m - 1} = vm^{n-1} \frac{m^n - 1}{m - 1} + m^{2n} - m^n \end{aligned}$$

したがって

$$V(X_n) = L_n - E(X_n)^2 + E(X_n) = vm^{n-1} \frac{m^n - 1}{m - 1}$$

練習 5.32 $P(Y = 0) = 0.25, P(Y = 2) = 0.75$ のとき、 X_n の期待値と分散を計算しなさい。

演習問題

問題 5.1 繰り返し試行で、成功する確率が過去 2 回の試行で成功する回数を k としたとき $(k+1)/(k+2)$ であるようなものを考える。このとき、無限の試行を繰り返したとき、ある試行で成功する確率を計算するためのマルコフモデルを考えなさい。

問題 5.2 状態が $0, 1, 2$ の確率過程 $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ を考えます。状態の推移に関して、次の式が成り立つものとします。

$$P\{X_{n+1} = k \mid X_n = j, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0\} = \begin{cases} p_{jk}^I & n \text{ が偶数の場合} \\ p_{jk}^{II} & n \text{ が奇数の場合} \end{cases}$$

ただし、 $\sum_{k=0}^2 p_{jk}^I = \sum_{k=0}^2 p_{jk}^{II} = 1, j = 0, 1, 2$ 。このとき、 $\{X_n; n \geq 0\}$ はマルコフ連鎖ですか。もしそうでないとしたら、状態を工夫する（過去の履歴を取り込む）ことでマルコフ連鎖を作り出すことができますか。

問題 5.3 m 個の遺伝子グループを考える。ここの遺伝子は二つのタイプのいずれかである。ある代で j 個の遺伝子が I 型だったとして、次の世代で I 型遺伝子の個数が k 個になる確率は以下の式で与えられるものとする。

$$\binom{m}{k} \left(\frac{j}{m}\right)^k \left(\frac{m-j}{m}\right)^{m-k}, \quad k = 0, 1, \dots, m$$

確率変数 X_n を n 世代目の I 型遺伝子の個数とし、 $X_0 = j$ とする。このとき、 $E(X_n)$ を求めなさい。

問題 5.4 二つスイッチの状態 on/off の比率を考える。一つのスイッチが n 日目にオンであるという事象はもう一つのスイッチとは独立で、その確率は次の式で与えられるものとする。

$$(n-1 \text{ 日目にオンであったスイッチの個数} + 1) / 4$$

たとえば、 $n-1$ 日目に両方のスイッチがオンならば、 n 日目にオンになる確率は両方のスイッチとも $3/4$ です。このとき、十分に時間が経過した後に両方ともオンである比率は幾つですか。両方ともオフである比率は幾つですか。

問題 5.5 先生が生徒に定期的に 3 種類の試験を課している。その評価は「できた」か「できなかった」かのいずれかであるものとする。3 種類の試験ができたと評価される確率はそれぞれ、 $p_1 = 0.3, p_2 = 0.6, p_3 = 0.9$ であるという。前回の試験ができたとなると、次の試験は 3 種類から等確率で選ばれた問題が出題される。もしできなかったとなると問題 1 が出題される。問題 1, 2, 3 が出題される比率を計算しなさい。

問題 5.6 積み上げられた n 枚のカードの中から等確率で 1 枚のカードを選んで一番上にのせる、という並べ替えを繰り返すものとする。無限に繰り返すと、カードの並び順はまったくランダムになる、すなわち、 n 枚の可能な並べ方 $n!$ 通りの中からランダムに選ばれた並び方を同じになることを直感的に説明しなさい。

問題 5.7 n 個の異なった要素からなるリストがあり、 k 番目の要素が参照される確率は p_k と与えられている。参照された要素はリストの先頭に戻される。 n 個の要素の並び順をシステムの状態とすると、状態の数は全部で $n!$ 通りある。

(1) この状態の推移はマルコフ性があることを説明しなさい。

(2) $k_1, k_2, \dots, k_n$ を $1, 2, \dots, n$ の任意の置換とし、 $\pi(k_1, k_2, \dots, k_n)$ を極限確率とする。状態が $k_1, k_2, \dots, k_n$ ということは、直前に参照された要素は k_1 、 k_1 を除いた $n - 1$ 個の要素の中で最も最近参照されたのは k_2 、その二つを除いた中でもっとも最近参照された要素は k_3 、という履歴をたどったということ意味する。このことから、状態確率は直感的に以下の式で表されられると思われる。

$$\pi(k_1, k_2, \dots, k_n) = p_{k_1} \frac{p_{k_2}}{1 - p_{k_1}} \frac{p_{k_3}}{1 - p_{k_1} - p_{k_2}} \cdots \frac{p_{k_{n-1}}}{1 - p_{k_1} - \cdots - p_{k_{n-2}}}$$

$n = 3$ のときにこの極限確率が確かに正しいことを証明しなさい。

問題 5.8 m 個の遺伝子グループを考える。ここの遺伝子は二つのタイプのいずれかである。ある代で j 個の遺伝子が I 型だったとして、次の世代で I 型遺伝子の個数が k 個になる確率は以下の式で与えられるものとする。

$$\binom{m}{k} \left(\frac{j}{m} \right)^k \left(\frac{m-j}{m} \right)^{m-k}, \quad k = 0, 1, \dots, m$$

確率変数 X_n を n 世代目の I 型遺伝子の個数とし、 $X_0 = j$ とする。このとき

(1) $E(X_n)$ を求めなさい。

(2) すべての遺伝子が I 型になってしまう確率はいくつですか。

問題 5.9 投票（開票）問題という有名な問題があります。市長の信任投票を行ったら a 票対 b 票で信任された、つまり $a > b$ 、ということが神様には分かっています。このとき、一票ずつ開票するものとして、信任票が常にリードをし続けて全投票の開票を終える確率を計算しなさい。例えば、 $a = 2, b = 1$ ならば、（ A を信任とすると）開票順は AAA^c, AA^cA, A^cAA の 3 通りで、条件を満たすのは一通りだから、答えは 3 分の 1。

問題 5.10 $2n$ 回勝負して、途中、勝ち数が常に負け数を上回っていながら最後に引き分けで終わる確率 w_{2n} が次の式で与えられることを証明しなさい。

$$w_{2n} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{4n} u_{2n-2}$$

ヒント 条件に当てはまるパスは、点 $(1, 1)$ から点 $(2n-1, 1)$ を経由し、時点 2 から時点 $2n-2$ までは 0 という状態を取ることはできません。状態 0 を通るパスの本数は鏡像の原理によって数えることが出来ませんか。

問題 5.11 $2n$ 回勝負して、途中、負け越さずに最後に引き分けて終わる確率が $4w_{2n+2}$ で与えられることを説明しなさい。

問題 5.12 $2n$ 回勝負して最終結果は引き分けだったとき、途中正の領域にある比率が m/n である（条件付き）確率は、 $m = 0, 1, \dots, n$ で一定であることを証明しなさい。したがって、たとえば、すべて正の領域で勝負を終える確率は $\frac{1}{n+1}$ で与えられます。

ヒント $p_m(n)$ と同じように考えればよい。最終結果は引き分けて、途中正の領域にある比率が m/n である確率を $q_m(n)$ と記すことにすると、最初に状態 0 に戻る時点で分類した全確率の公式を適用した $q_m(n)$ に関する漸化式を導くことが出来るはずです。あとは数学的帰納法。

問題 5.13 推移確率が $p_{0i} = a_i, p_{i,i-1} = 1 (i = 0, 1, 2, \dots, N)$ で与えられるようなマルコフ連鎖が極限分布を持つ必要十分条件を示し、その条件が成り立つときの極限分布を計算しなさい。

問題 5.14 推移確率が $p_{i,i+1} = 1 - p_{i,0} = a_i (i = 0, 1, 2, \dots)$ （ただし、 $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots$ ）で与えられるようなマルコフ連鎖が極限分布を持つことを示し、極限分布を計算しなさい。

問題 5.15 有限状態の再帰的マルコフ連鎖について、状態 i から出発して、状態 k を初めて訪問するまでの時間の期待値を m_{ik} とする。

(a) 逐次推移解析法を使って次の式が成り立つことを示しなさい。

$$m_{ik} = 1 + \sum_{j \neq k} p_{ij} m_{jk}$$

(b) 両辺に定常確率 π_i を掛けて i について和を取ることににより $\pi_i = 1/m_{ii}$ であることを導きなさい。

問題 5.16 ある人が家と会社の間の通勤に、雨が降ったら車を使うことにしている。雨が降っていないならば歩く。雨が降っていないくてもそこに車がなければ歩く。ある朝雨が降っていたとすると帰りにも雨が降っている確率、ある日の帰りに雨が降っていたとすると、翌朝にも雨が降っている確率は共に p とする。車は 1 台しか持っていないとして、雨の中を歩いて帰る羽目になる日は 30 日間でどれくらいありますか。車が 2 台ある場合はどうなりますか。

問題 5.17 推移確率が $p_{ik} = 1/(i+2) (k = 0, 1, \dots, i+1; i = 0, 1, 2, \dots)$ で与えられるマルコフ連鎖の定常分布を計算しなさい。

6 マルコフ過程

離散時点で定義されたマルコフ連鎖を連続時間に拡張したものがマルコフ過程である。任意時点で状態変化を起こす可能性があり、その変化が過去の履歴と無関係に、現在の状態だけから定まる、という条件を満たした連続時間の確率過程である。

例えば、スーパーでレジ前に並ぶ客の行列の長さを状態とすると、新たな客が到着して行列の後ろに並ぶと行列の長さが伸び、支払いが終わると客は退去して行列の長さが1減る。そのタイミングは連続時間で起きると考えて良い。その結果として、連続時間で起きるランダムな事象により、待ち行列の長さがランダムに増減する。行列の長さ（システムの状態）は離散、その状態変化は連続時点で起きる。

あるいは、携帯電話の基地局（受信アンテナ）をどこに設置するのが良いか、という問題を考える。そのために瞬間瞬間にどれくらいの回線が使われているかを知る必要がある。客は気まぐれに通話要求を出し、気まぐれに通信を終了すると考えると、同時に接続している回線の本数（利用している携帯端末の数）の時間的推移は（過去のデータを分析しても）予想が付かないと言っても良い。したがって、使用回線の本数の時間変化は、マルコフ性を持つ確率過程としてモデル化することはもっともらしい。この場合も、回線の本数（システムの状態）は離散、その状態変化は連続時点で起きる。

離散時間のマルコフ連鎖モデルでは、状態推移時点で基本の単位時間があり、状態変化はその単位時間の整数倍の時点でのみ発生した。一方、回線の動きのサンプルパスを描いてみると、気まぐれな、いつ起きるか分からない接続要求の到着により使用回線数は1増え、いつ切られるか分からない現在接続中の回線が切断されると1減る、というような動きをする。その変化時点は連続で、基本の単位時間はない。したがって、使用回線数の動きは連続時間で観測される確率過程によってモデル化するのが自然である。

6.1 マルコフ過程モデル

時刻 t における確率変動するシステムの状態を $X(t)$ としたとき、 $\{X(t), t \geq 0\}$ 、あるいは一般に $\{X(t), t \in T\}$ を連続時間の確率過程という。 T は興味の対象となる時間の範囲を指定した集合で、時間パラメータ集合という。確率過程がマルコフ性を持つとは、離散の場合と同じように、次が成り立つことである：

将来の事象の確率規則は、
現在の状態が与えられると、過去の履歴とは無関係に定まること

これを式で表すと、たとえば次のようになる。

$$\begin{aligned} P(X(t+s) = k \mid X(s) = i, X(u) = x(u) \ (0 \leq u < s)) \\ = P(X(t+s) = k \mid X(s) = i) \end{aligned}$$

$\{X(u) = x(u), (0 \leq u < s)\}$ は、 s より前のサンプルパスがすべて分かっている、ということを表している。

連続時間の動きと言っても、それをビデオにとれば毎秒数十コマの静止画の集まりになるように、実質は微少時間間隔で観測される離散時間の確率過程を考えておけばよい。これはちょうど、2項過程から（ベルヌイ試行を高速に繰り返して）ポワソン過程に移行したのと同じ考え方である。

連続時間のマルコフ連鎖を微小な時間間隔 Δt ごとに観測したとすると、それは離散時点の確率過程と考えることが出来、もとの過程にマルコフ性があるならば、この離散化した確率過程はマルコフ連鎖になっていなければならない。この離散化したマルコフ連鎖を分析してみよう。観測の間隔を短くしただけで、全体の動きの時間スケールは変わらないのだから、たまに状態変化が起きる以外は、ほとんどの推移は自分自身に戻ってくる。つまり、推移確率行列は単位行列に近いものになるはずである。

この場合、推移確率行列の対角要素 p_{ii} は状態 i から状態 i へ推移する確率、と考えるよりは、状態 i からそれ以外の状態へ推移する確率を 1 から引いたもの、と考えた方が議論がしやすい。状態 i からそれ以外の状態へ推移する確率は観測の間隔が微小なので、ほとんど 0 なのだが、それを区間の長さ Δt に比例すると仮定すると、

$$1 - p_{ii} = v_i \Delta t$$

のように書くことが出来る。パラメータ v_i の意味は以下の通り。

Δt を非常に小さく取ると、状態 i を n 回続けて訪問する確率は、状態 i の「滞在時間 T_i 」が $n\Delta t$ より大きい確率と言い換えても良い。 $t = n\Delta t$ とすると、

$$P(T_i > t) = p_{ii}^n = (1 - v_i \Delta t)^n = \left(1 - v_i \frac{t}{n}\right)^n$$

となる。ここで、さらに $\Delta t \rightarrow 0$ 、つまり $n \rightarrow \infty$ という極限操作を行うと、

$$P(T_i > t) = \left(1 - v_i \frac{t}{n}\right)^n \rightarrow e^{-v_i t}$$

となって、状態 i の滞在時間が平均 v_i^{-1} の指数分布に従うことが導かれる（幾何分布を連続化すると指数分布になる）。

滞在時間を終えたあと、次に推移する状態は現在の状態だけに依存してマルコフ的に決まる必要がある。状態 i から状態 k への推移確率を p_{ik} とすると、 $p_{ik} (k \neq i)$ は次のように書き換えることができる

$$p_{ik} = \frac{p_{ik}}{1 - p_{ii}} (1 - p_{ii}) = \frac{p_{ik}}{1 - p_{ii}} \times v_i \Delta t$$

このことにより p_{ik} は、状態 i から別の状態へ推移するという条件の下で、それが k である確率

$$q_{ik} = \frac{p_{ik}}{1 - p_{ii}}, \quad k \neq i$$

と、状態 i の滞在を終える確率 $v_i \Delta t$ の積に分解できる。

以上のことから、連続時間のマルコフ連鎖 $\{X(t), t \geq 0\}$ は、状態 i に指数分布に従う時間滞在し、 i だけに依存するある確率分布に従って次の状態へ推移する、という動きを繰り返す確率過程、ということが出来る。したがって、連続時間のマルコフ連鎖を理解するためには指数分布の知識が必要である。

例 6.1 機械の稼働時間が平均 10 日の指数分布に従う、その修理は平均 1 日の指数分布に従うとすれば、稼働状態を 1、修理状態を 0 として、機械の状態を連続時間のマルコフ連鎖でモデル化することが出来る。このとき、 $v_0 = 1, v_1 = 0.1$ とするのが良い。状態推移は $q_{01} = q_{10} = 1$ 。時間の単位を hour とすれば、 $v_0^{-1} = 24, v_1^{-1} = 240$ としても良いが、煩雑になるだけ。

6.2 指数分布の性質

改めて、指数分布の性質をまとめておく。詳しくは 3 章を参照のこと。定数 $\lambda > 0$ に対して、密度関数が次の式で与えられるような確率変数は、パラメータ λ の指数分布に従うという。

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

定義域は非負実数とするが、 $t < 0$ では $f(t) = 0$ と考えても良い。累積分布関数 $F(t)$ 、モーメント母関数 $M(\theta)$ はそれぞれ次のように与えられる。

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

$$M(\theta) = E(e^{\theta X}) = \frac{\lambda}{\lambda - \theta}$$

期待値、分散、変動係数は

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad CV = \frac{\sqrt{V(X)}}{E(X)} = 1$$

と計算できる。

練習 6.1 平均 10 の指数分布に従う確率変数を W としたとき、 W の累積分布関数、モーメント母関数、分散を（上の式に当てはめるのではなく）「計算」しなさい。

練習 6.2 X は平均 3 の指数分布に従う確率変数、 M は X の整数部分の値に 1 を加えたものという値を取る離散確率変数とする（ $X = 3.4$ ならば $M = 4$ のように）。このとき、 M の確率関数を求めなさい。

指数分布は幾何分布を「連続化」することによって導かれた。幾何分布はベルヌイ試行で成功するまでの試行回数が従う確率規則を表現したもので、指数分布への連続化は、いわばベルヌイ試行を微小間隔で高速に繰り返したときに成功するまでの時間が指数分布に従うと考えればよいことを示している。そう考えると、以下に挙げる指数分布の性質は直感的に納得できるだろう。

性質 1（無記憶性） X をパラメータ λ の指数分布に従う確率変数とすると、任意の非負実数 s, t に対して次の式が成り立つ

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t)$$

逆に、この式を満たす確率変数は指数分布に従う。

性質 2（最小値の分布） X, Y が独立に、それぞれパラメータ λ, μ の指数分布に従うとき、 $\min(X, Y)$ はパラメータ $\lambda + \mu$ の指数分布に従う。

$$P(\min(X, Y) > t) = P(X > t, Y > t) = P(X > t)P(Y > t) = e^{-(\lambda + \mu)t}$$

確率変数の個数が増えても同じことが言える。つまり、パラメータ λ_i の指数分布に従う確率変数を $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ としたとき、 $\min \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ はパラメータ $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ の指数分布に従う。

性質 3 X, Y が独立に、それぞれパラメータ λ, μ の指数分布に従うとき、 $X < Y$ の確率は $\lambda/(\lambda + \mu)$ 。

$$P(X < Y) = \int_0^\infty P(t < Y) \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu)t} dt = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

例 6.2 銀行の ATM 機械の使用時間は平均 1 分の指数分布に従うとする。2 台ある ATM が空いているときに 3 人の人が同時に到着したとすると、第三の客の待ち時間は二つの指数分布の最小値の分布に等しい。つまり、平均 30 秒の指数分布に従う。どちらが先に空くかは五分五分。4 人が同時に到着したとした場合、4 番目の客がどちらの窓口でサービスされるかも、同じように五分五分、しかし、待ち時間はもはや指数分布ではない。

6.3 推移確率関数

連続時間のマルコフ連鎖 $\{X(t), t \geq 0\}$ でも、離散時間の場合と同じように、 $X(t)$ の確率分布を知るのが当面の目標である。離散の場合は、推移確率行列の n 乗を計算する問題に帰着された。連続の場合、最小単位がないので、別の工夫が必要である。

$$p_{ik}(t) = P(X(t+s) = k \mid X(s) = i)$$

は連続時間のマルコフ連鎖の推移確率関数と呼ばれる。最初の時点 s によらないという、斉時性の仮定を置いていることに注意。 $p_{ik}(t)$ を i, k 要素とする行列を $P(t)$ と書いて、推移確率関数行列という。

初期分布を

$$\pi_i(0) = P(X(0) = i)$$

と置けば、

$$P(X(t) = k) = \sum_j \pi_j(0) p_{jk}(t)$$

と書けるので、 $X(t)$ の確率分布を知るということはこの推移確率関数を知るということにほかならない。

最初の説明のように、微小間隔の離散モデルから連続化することを考えると、次のようなストーリーが考えられる。ここではあまり数学的に厳密な議論には立ち入らないことにする。連続時間のマルコフ連鎖を Δt 間隔で離散化したマルコフ連鎖モデル $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ の推移確率行列を $P(\Delta t)$ とすると、それは次のように表すことが出来た。

$$P(\Delta t) = I + \Delta t \begin{pmatrix} -\nu_0 & \nu_0 q_{01} & \nu_0 q_{02} & \nu_0 q_{03} & \cdots \\ \nu_1 q_{10} & -\nu_1 & \nu_1 q_{12} & \nu_1 q_{13} & \\ \nu_2 q_{20} & \nu_2 q_{21} & -\nu_2 & \nu_2 q_{23} & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \equiv I + A \Delta t$$

ここで出てくる行列 A は生成行列generator あるいは率行列rate matrix と呼ばれる。離散時間のマルコフ連鎖の推移確率行列と同様に、連続時間のマルコフ連鎖の情報はすべてこの生成行列が持っている。

離散時間のマルコフ連鎖で考えると、 $P(\Delta t)^n$ の各要素は n 回推移後の条件付き確率を表すが、それを連続時間のマルコフ連鎖に翻訳すると、近似的に $n\Delta t (= t)$ 時点での推移確率関数 $p_{ik}(t)$ を表すと言って良い。 Δt を 0 に近づけて行けば真の推移確率関数が得られることが期待できる。 n が十分に大きければ、

$$\begin{aligned} \left(I + A \frac{t}{n}\right)^n &= I + At + \binom{n}{2} \left(A \frac{t}{n}\right)^2 + \binom{n}{3} \left(A \frac{t}{n}\right)^3 + \cdots \\ &\approx I + At + \frac{1}{2} (At)^2 + \frac{1}{3!} (At)^3 + \cdots \end{aligned}$$

と置き直しても良い。そこで、実数の場合同様、行列を変数とする指数関数を使って

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!} (At)^2 + \frac{1}{3!} (At)^3 + \frac{1}{4!} (At)^4 + \cdots$$

と定義すると、

$$P(\Delta t)^n = (I + A\Delta t)^n = \left(I + A \frac{t}{n}\right)^n \rightarrow e^{At} = P(t) \quad (\Delta t \rightarrow 0)$$

となることが期待できる。形式的には、 e^{At} をテーラー展開して得られる行列の無限和の i, k 要素が $P(X(t) = k \mid X(0) = i)$ に等しいことが分かる。

6.4 コルモゴロフの微分方程式

推移確率関数をきちんと求めるには微分方程式を使う。全確率の公式によって、以下の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} p_{ik}(t+h) &= P(X(t+h) = k \mid X(0) = i) \\ &= \sum_j P(X(t+h) = k \mid X(t) = j) P(X(t) = j \mid X(0) = i) \\ &= \sum_j p_{ij}(t) p_{jk}(h) \end{aligned}$$

この関係式はチャプマンコルモゴロフの等式と呼ばれる。行列表記すれば

$$P(t+h) = P(t)P(h)$$

となる。

h を微小量と考えて次のように変形すると、 $p_{ik}(t)$ に関する微分方程式に持ち込むことが出来る。

$$\begin{aligned}
p_{ik}(t+h) &= p_{ik}(t)p_{kk}(h) + \sum_{j \neq k} p_{ij}(t)p_{jk}(h) \\
\Rightarrow p_{ik}(t+h) - p_{ik}(t) &= -(1 - p_{kk}(h))p_{ik}(t) + \sum_{j \neq k} p_{ij}(t)p_{jk}(h) \\
\Rightarrow \frac{p_{ik}(t+h) - p_{ik}(t)}{h} &= -\frac{1 - p_{kk}(h)}{h}p_{ik}(t) + \sum_{j \neq k} p_{ij}(t)\frac{p_{jk}(h)}{h}
\end{aligned}$$

ここで、

$$p_{ii}(h) \approx 1 - v_i h, p_{ik}(h) \approx v_i q_{ik} h$$

と書くことができたことを思い起こすと、

$$\frac{1 - p_{ii}(h)}{h} \rightarrow v_i, \frac{p_{ik}(h)}{h} \rightarrow v_i q_{ik}$$

となるので、 $p_{ik}(t)$ に関する微分方程式が導かれる。

$$\frac{d}{dt}p_{ik}(t) = -v_k p_{ik}(t) + \sum_{j \neq k} v_j q_{jk} p_{ij}(t)$$

これはコルモゴロフの微分方程式と呼ばれる。

行列の微分を各要素の微分と定義すると、コルモゴロフの微分方程式は次のような行列表記が出来る。

$$\frac{d}{dt}P(t) = P(t)A$$

ここで、

$$P(t) = e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \frac{1}{3!}(At)^3 + \frac{1}{4!}(At)^4 + \dots$$

を代入すると、確かに成り立つ。この結果は、近似離散モデル $P(\Delta t)$ から導かれた結果と一致している。

例 6.3 状態数が 2 の場合、 $p_{00}(t) + p_{01}(t) = 1$ なので、

$$\frac{d}{dt}p_{00}(t) = -v_0 p_{00}(t) + v_1 p_{01}(t) = -(v_0 + v_1)p_{00}(t) + v_1$$

これを解くと、

$$\begin{aligned}
p_{00}(t) &= \frac{v_1}{v_0 + v_1} + \frac{v_0}{v_0 + v_1} e^{-(v_0 + v_1)t} \\
p_{01}(t) &= \frac{v_0}{v_0 + v_1} - \frac{v_0}{v_0 + v_1} e^{-(v_0 + v_1)t}
\end{aligned}$$

同様に、

$$\begin{aligned}
p_{10}(t) &= \frac{v_1}{v_0 + v_1} - \frac{v_1}{v_0 + v_1} e^{-(v_0 + v_1)t} \\
p_{11}(t) &= \frac{v_0}{v_0 + v_1} + \frac{v_1}{v_0 + v_1} e^{-(v_0 + v_1)t}
\end{aligned}$$

が計算できる。

$t \rightarrow \infty$ とすると、緩やかに（指数関数的に）一定値に近づく。これを極限確率と言う。離散時間のマルコフ連鎖と同じように、その値は最初の状態に依存しない。

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} p_{00}(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} p_{10}(t) = \frac{v_1}{v_0 + v_1} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} p_{01}(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} p_{11}(t) = \frac{v_0}{v_0 + v_1}\end{aligned}$$

練習 6.3 状態数が 2 のマルコフ過程の推移確率関数に関する連立微分方程式を作り、その方程式を解くと上のような結果になることを確かめなさい。

6.5 定常解析

離散時間のマルコフ連鎖と同様、ある程度時間が経過したあとのふるまいを考えようとする、遠い昔の初期状態の影響は考えなくて良い、と仮定しても良いことが多い。つまり、

$$p_{jk}(t) = P(X(t) = k \mid X(0) = j) \approx \pi_k \quad (t \gg 1)$$

としても良いことが多いので、これを前提として話を進める。 π_k は時間的に不変という意味で定常確率と呼ばれる。 π_k を k 要素とするベクトルを π と書き、定常分布という。

チャプマンコルモゴロフの等式から

$$P(t+h) = P(t)P(h) \approx P(t)(I + Ah) = P(t) + P(t)Ah$$

となるが、ある程度時間が経過した後では、上で仮定したことから $P(t) \approx P(t+h)$ としてよいので、定常分布を使って

$$\pi A = 0$$

という等式が導かれる。この等式を平衡方程式、あるいは定常方程式という。ただし、 π は要素が非負でその総和が 1 となる確率ベクトルでなければいけない。

平衡方程式を

$$v_k \pi_k = \sum_{i \neq k} v_i q_{ik} \pi_i$$

のように書き換え、両辺に微少量 Δt を掛けて考えると、なぜ「平衡」なのかが分かる。左辺は状態 k にいて、次の Δt 後に他の状態へ推移する確率、右辺は k 以外の状態にいて、次の Δt 後に状態 k へ推移する確率を表しているので、両者が等しいということは、状態間の出入りが「平衡状態」にあるということを意味する。「定常」というのは初期状態の確率を $P(X(0) = k) = \pi_k$ としたとき、 $X(t)$ の分布が π に従うということから来ている。

離散時間の場合と同じように、状態数が有限で既約ならば、定常分布が存在する。

練習 6.4 生成行列が下のように与えられるマルコフ過程の平衡方程式を立て、それを解きなさい。

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0.7 & 0.3 \\ 1.4 & -2 & 0.6 \\ 0.2 & 0.8 & -1 \end{pmatrix}$$

6.6 出生死亡過程

応用上、最もよく使われるマルコフ過程の一つが出生死亡過程と呼ばれる単純なモデルである。その名の通り、バクテリアのような個体の集団の形成過程を確率モデルで表したものである。 $X(t)$ を時刻 t における個体の総数とする。一つの個体はランダムに「死亡」したり、「出生」によって個体を増やしたりする。

死亡の瞬間、出生の瞬間がいつ訪れるか全く予想が付かないとすると、非負整数を状態とするマルコフ過程としてモデル化できるが、さらに、双子三つ子を考えない、心中や集団自決をすることはないと仮定すれば、連続時間で同時に二つ以上の個体が増減する可能性は無視して良い。

その結果、 $X(t)$ は「直前の」状態から高々 1 増減するだけになるので、生成行列は次のような形になる。

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & -\lambda_1 - \mu_1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -\lambda_2 - \mu_2 & \lambda_2 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

このような生成行列を持つマルコフ過程を出生死亡過程というのである。

正確な定義は、微小間隔における推移確率関数を規定することによってなされる。

定義 6.1 非負整数値を状態とし、任意の状態 i, k と任意の時刻 $t \geq 0$ に対して、推移確率関数が次の式で定義されるとき、 $\{X(t), t \geq 0\}$ は出生死亡過程に従うという。 λ_i, μ_i は任意の非負の定数とする。

$$P_{ik}(t, t+h) = P(X(t+h) = k \mid X(t) = i) = \begin{cases} \lambda_i h + o(h), & k = i+1 \\ \mu_i h + o(h), & k = i-1 \geq 0 \\ 1 - \lambda_i h - \mu_i h + o(h), & k = i \\ o(h), & |k-i| > 1 \end{cases}$$

$P_{ii}(t, t+h) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h)$ となることから、状態 i の滞在時間はパラメータ $\lambda_i + \mu_i$ の指数分布に従うことが分かる。また、 $\lambda_i/(\lambda_i + \mu_i), \mu_i/(\lambda_i + \mu_i)$ はそれぞれ、状態 i からほかの状態に変化するという条件の下で、それぞれ状態 $i+1, i-1$ へ推移する条件付き確率になっている。したがって、出生死亡過程の動きは、指数分布の性質を使って次のように解釈することも出来る。パラメータ λ_i の指数分布に従う確率変数を B_i 、パラメータ μ_i の指数分布に従う確率変数を D_i としたとき、 $\min\{B_i, D_i\}$ に従う時間状態 i に滞在し、 $P(B_i < D_i)$ の確率で $i+1$ へ、さもなければ $i-1$ へ推移する、というように動く。言い換えれば、死に神と生き神(?) が競争をして勝った方が得点を稼ぐ、というようなものである。その意味で、 λ_i は個体数が i の時の出生率、 μ_i は死亡率と呼ばれる。

例 6.4 テーマパークには客が一人一人ばらばらにランダムに到着して、ランダムな時間滞在して帰って行く(と仮定する)。人を個体として考えれば、出生死亡過程でモデル化できる。ランダムに到着し、ランダムに退去すると仮定しているのでマルコフ性が成り立つからである。1 分間の平均到着数を a 、平均滞在時間を b 分とすれば、出生率は個体数に影響されず、常に a 、死亡率は個体数が n のとき nb^{-1} となる(なぜか?)。

例 6.5 ある機械の故障修理の問題で、稼働時間が平均 10 日の指数分布に従い、修理時間は平均

1 日の指数分布に従うとすれば、故障機械の台数 (0 か 1) の動きは出生死亡過程でモデル化できる。出生率は $\lambda_0 = 0.1, \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = 0$ 、死亡率は $\mu_1 = 1, \mu_2 = \mu_3 = \dots = 0$ である。この場合、個体数が 1 のとき出生することはあり得ないので、個体数は 2 以上になることはない。

機械が 2 台ある場合の出生率は $\lambda_0 = 2 \times 0.1, \lambda_1 = 0.1, \lambda_2 = \dots = 0$ 、死亡率は修理工が一人しかいないということであれば故障台数が増えても変わらず、 $\mu_1 = \mu_2 = 1, \mu_3 = \dots = 0$ である。

練習 6.5 パラメータ $\lambda_i = (i+1)\lambda (i = 0, 1, 2, \dots), \mu_i = i\mu (i = 1, 2, \dots)$ の出生死亡過程について、以下の問いに答えなさい。

- (1) 状態 0 から状態 2 へ推移する時間の期待値を計算しなさい。
- (2) 状態 2 から状態 5 へ推移する時間の期待値を計算しなさい。
- (3) 上の各問いに対して、それらの所要時間の分散を計算しなさい。

6.6.1 定常分布

マルコフ過程の一般論を適用して、定常解析を実施する。平衡方程式 $\pi A = 0$ を書き下すと

$$\begin{cases} \lambda_0 \pi_0 = \mu_1 \pi_1 \\ (\lambda_1 + \mu_1) \pi_1 = \lambda_0 \pi_0 + \mu_2 \pi_2 \\ (\lambda_i + \mu_i) \pi_i = \lambda_{i-1} \pi_{i-1} + \mu_{i+1} \pi_{i+1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

のようになる。最初の二つの式を加えると

$$\lambda_1 \pi_1 = \mu_2 \pi_2$$

さらに 3 番目の $i = 2$ の式を加えると

$$\lambda_2 \pi_2 = \mu_3 \pi_3$$

となる。以下同様にして、

$$\lambda_i \pi_i = \mu_{i+1} \pi_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

という関係式が得られるので、すべての確率を π_0 を使って次のように表すことが出来る。

$$\pi_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i} \pi_0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

ここで、 $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \dots = 1$ という確率条件を当てはめると

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i} \pi_0 = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i} < \infty$$

が成り立たなければいけない。これを出生死亡過程の平衡条件、あるいは定常条件という。

平衡条件が成り立つか否かは、 $i \rightarrow \infty$ としたとき、 λ_{i-1}/μ_i がどうなるかが一つの目安。

- (1) $\lambda_i \rightarrow \exists \lambda, \mu_i \rightarrow \exists \mu$ ならば、 $\lambda < \mu$ のとき定常 (究極の出生率が死亡率より少なければ定常)
- (2) $\lambda_i \rightarrow \exists \lambda, \mu_i \approx i\mu (i \gg 1)$ ならば無条件で定常 (死亡率が増大し続ければ人口が発散することはないので、定常状態がある)

(3) 出生率がある人口以上になると 0 になるという場合も、無条件で定常。

一般に、 $\lambda_i/\mu_i \geq 1$ となる組み合わせが有限個しかなければ人口は爆発しない。特に、 $\lambda_i = \lambda, \mu_i = \mu$ ならば、 $\lambda < \mu$ のとき定常となり、人口は以下のように、パラメータ λ/μ の幾何分布に従う。

$$\pi_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

例 6.6 (機械修理工のモデル) 機械が M 台稼働していて、整備工 (修理工) が 1 人で、その機械群の整備を担当している。修理中に別の機械が壊れたら、順番がくるまで、ダウンしたまま待機する。機械の稼働率はいくつか、という問題。

稼働時間も修理時間も指数分布とすると、マルコフ解析が出来る。故障中の機械台数を個体の人口と考えると、その人口の増減は出生死亡過程に従う。死亡とは故障している機械の修理が終わる事に対応し、修理工が一人なので、その率は常に一定、平均修理時間の逆数 μ に等しい。出生は稼働中の機械が故障することにあたり、稼働時間の平均を λ^{-1} とすれば、出生率は稼働機械の台数に λ を掛けたものになる。したがって、人口 i の時の出生率は $(M-i)\lambda$ に等しい。

$\lambda_i = (M-i)\lambda, \mu_i = \mu$ を平衡方程式に代入して定常分布を求めれば、稼働率は計算できる。人口が M の時は故障する機械が無くなるので、出生率は 0、したがって、状態数は有限なので、無条件で定常分布 $\{\pi_i\}$ が求まる (確かめよ)。

$$\pi_i = M(M-1)\cdots(M-i+1) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \pi_0 = \frac{M!}{(M-i)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \pi_0, \quad i = 0, 1, \dots, M$$

稼働率は延べ相対稼働時間 (単位時間あたりの平均稼働時間) を機械台数で割ることによって求めることが出来る。すなわち、 $M^{-1} \sum_{i=0}^{M-1} (M-i)\pi_i$ とすればよい。

練習 6.6 3 台の機械を一人の整備工が点検修理を担当している。平均稼働時間は 4 日、平均修理時間は 1 日としたとき、機械の稼働率はどれくらいになりますか。稼働時間も修理時間も指数分布に従うものとして計算しなさい。

6.6.2 純出生過程

死亡率が 0 の出生死亡過程を純出生過程という。

$$\begin{aligned} P(X(t+h) - X(t) = 1 \mid X(t) = n) &= \lambda_n h + o(h) \\ P(X(t+h) - X(t) = 0 \mid X(t) = n) &= 1 - \lambda_n h + o(h) \\ P(X(t+h) - X(t) \geq 2 \mid X(t) = n) &= o(h) \\ P(X(t+h) - X(t) < 0 \mid X(t) = n) &= 0 \end{aligned}$$

特に、出生率が常に一定で $X(0) = 0$ とすると、ポワソン過程になる。

有限の時間区間の間に無限の出生が起きないための必要十分条件は次の式で与えられる。

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$$

例 6.7 (ユール過程) 各個体が一定の生殖能力を持続ける、つまり、出生率は個体数に比例する純出生過程をユール過程という。ただし、 $X(0) = 1$

$$P(X(t+h) - X(t) = 1 \mid X(t) = n) = n\lambda h + o(h)$$

その解は

$$P_n(t) = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{n-1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

例 6.8 ある商品の売れ行きは、その商品を持っている人の数に依存すると考えられる。時点 t で商品を持っている人の数を $X(t) = n$ 、次の微小時間 h で一人増える確率を $\lambda_n h + o(h)$ とすると、 $\{X(t)\}$ は純出生過程になる。特に人気商品の場合は、口コミ効果で人口に比例して売れると考えると、 $\lambda_n = n\lambda$ として良いので、 $\{X(t)\}$ はユール過程に従う。もう少し加速させて $\lambda_n = n^{1+\alpha}\lambda (\alpha > 0)$ とすると、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} < \infty$$

となつて、有限の時間で無限に売れることになる。つまり大ブームというわけである。現実には人口は有限なので、理論通りには行かないが。

6.6.3 純死亡過程

出生率が 0 の出生死亡過程を純死亡過程という。初期状態は $X_0 = N$ とする。

$$\begin{aligned} P(X(t+h) - X(t) = -1 \mid X(t) = n) &= \mu_n h + o(h) \\ P(X(t+h) - X(t) = 0 \mid X(t) = n) &= 1 - \mu_n h + o(h) \\ P(X(t+h) - X(t) \leq -2 \mid X(t) = n) &= o(h) \\ P(X(t+h) - X(t) > 0 \mid X(t) = n) &= 0 \end{aligned}$$

純死亡過程は状態 0 が吸収状態となる。

もし、 $\mu_n = n\mu$ ならば、状態 n の滞在時間はパラメータ μ の指数分布に従う独立な n 個の最小値と見ることが出来る。指数分布が無記憶であることを考えると、純死亡過程は、パラメータ μ の指数分布に従う独立な N 個の個体が死に絶えるまでの動きをモデル化したもの、と言うことが出来る。したがって、時点 t で状態が k ということは、 N 個のうち $N - k$ 個が死んで、 k 個が生き残っているという事象に等しいので、

$$P(X(t) = k \mid X(0) = N) = \binom{N}{N-k} F(t)^{N-k} (1 - F(t))^k, \quad k = 0, 1, \dots, N$$

となる。ただし $F(t) = 1 - e^{-\mu t}$ とした。この確率は、パラメータ $n, 1 - F(t)$ の 2 項分布の確率に等しい。したがって、その期待値は次で表される。

$$E(X(t) \mid X(0) = n) = n(1 - F(t)) = ne^{-\mu t}$$

例 6.9 (ケーブルの切断問題) 吊り橋のケーブルは細いワイヤーを縫り合わせたもの。1 キロの荷重で 100 年間切れない、といわれているワイヤーを 1000 本縫り合わせて作ったケーブルに 1 トンの荷重を掛けたときの寿命はどれくらいか、という問題。5 年? 10 年? 50 年? 100 年? ただし、ワイヤーの荷重 w と平均寿命 T の関係は下の式で与えられる。

$$T = aw^{-b} \quad (\text{実験データ: } a = 100, b = 40)$$

切れていないワイヤーの数を「人口」とするとして、ワイヤーはいつ切れるか全く予想がつかないとすると、荷重 w のワイヤの寿命はパラメータ T^{-1} の指数分布を仮定して良いので、純死

亡過程でモデル化することができる。ケーブルで支える荷重を $W = 1000$ 、最初のワイヤーの本数を $N = 1000$ とすると、ワイヤーの本数が n となったとき、新たにどれか 1 本のワイヤーが切れるまでの時間は

$$\frac{T}{n} = a \left(\frac{W}{n} \right)^{-b} \times \frac{1}{n}$$

したがって、最終的にゼロに吸収されるまでの平均時間は

$$a \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \left(\frac{W}{n} \right)^{-b}$$

で与えられる。1 本のワイヤーにかかる荷重を $D = W/N (= 1)$ とすると、

$$a \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \left(\frac{W}{n} \right)^{-b} = \frac{a}{D^b} \sum_{n=1}^N \left(\frac{n}{N} \right)^{b-1} \frac{1}{N} \approx \frac{a}{D^b} \int_0^1 x^{b-1} dx = \frac{a}{bD^b}$$

したがって、 $a = 100, b = 40, D = 1$ を代入すると、ケーブルの寿命は 2.5 年！ ケーブルの本数の減り方をグラフに表すと次のようになる。ある本数以下になると、荷重を支えきれずに急速に破壊に向かうことが分かる。

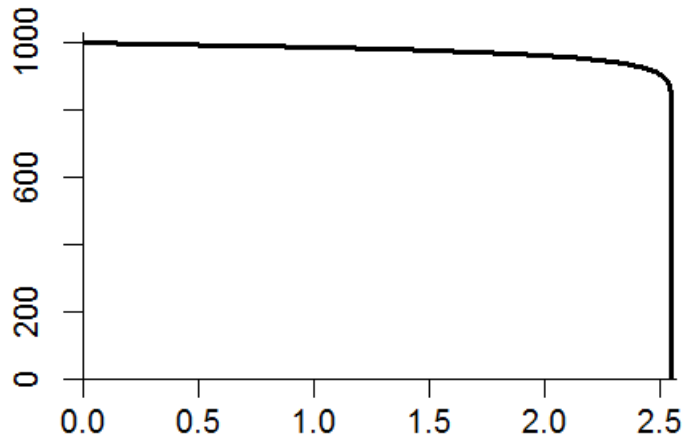


図 10 ケーブルの寿命

これを 100 年にするためには

$$\frac{a}{bD^b} = 100 \iff D = \left(\frac{1}{40} \right)^{1/40} \approx 0.9119 = \frac{1000}{N}$$

が成り立つような N が必要になる。結果は、1097 本のワイヤーでケーブルを作れば 1 トンの荷重を 100 年支えるケーブルができる。平均に比べて約 1 割増しとなり、これがリスク（管理）の費用になる。トンネルの天井板がある日突然落下する、という現象にも、同じような理屈が働いているとみるべきである。

演習問題

問題 6.1 X は平均 λ^{-1} の指数分布に従うものとする。このとき $X < c$ という条件の下での X の期待値を次の二つの方法で計算しなさい。

- (1) 条件付期待値の定義どおりに計算しなさい。
- (2) 以下の全確率の公式を使って計算しなさい。

$$E(X) = E(X | X \leq c)P(X \leq c) + E(X | X > c)P(X > c)$$

問題 6.2 X は指数分布に従う確率変数としたとき、 $E(X^2 | X > 1)$ と等しいのは次の三つのうちどれですか。計算することなく、理由とともに答えなさい。

$$(1) E((X+1)^2) \quad (2) E(X^2) \quad (3) (1+E(X))^2$$

問題 6.3 X_i は平均 μ_i^{-1} の指数分布に従っているものとする ($i = 1, 2, 3$)。このとき

- (1) $P(X_1 < X_2 < X_3)$ はいくつですか。
- (2) $P(X_1 < X_2 | \max(X_1, X_2, X_3) = X_3)$ はいくつですか。

問題 6.4 サービス窓口が二つあって、客は最初の窓口でサービスを終えた後、二番目の窓口のサービスを受けて退去する。サービス時間はいずれも指数分布で、平均時間は順番にそれぞれ λ^{-1}, μ^{-1} とする。二つの窓口の間に待ちスペースはない。最初の窓口でサービスを終えたとき、次の窓口がまだサービス中の場合は、最初の窓口から先へ進めないで、最初の窓口の機能が停止する。つまり、待ち客がいても次のサービスを開始することができない。2 番目の窓口のサービスを終えたとき、最初の窓口のサービスを終えた客がいれば、直ちにその客へのサービスを開始する。もし、最初の窓口に待ち客がいれば、その客に対するサービスが開始される。このとき以下の問に答えなさい。

- (1) 客 A が到着したとき、最初の窓口には客がなく、2 番目の窓口はサービス中だったとすると、客 A が退去するまでの平均滞在時間を求めなさい。
- (2) 客 B が到着したとき、二つの窓口がサービス中で、待ち客はいなかったとすると、客 B の平均滞在時間はどれくらいですか。

問題 6.5 (続き) 二つの窓口の間には 1 人が待てるだけのスペースがあるものとする。ある客 A が最初の窓口に到着したとき、最初の窓口は空いていて、次の窓口はサービス中、さらに 1 人の客が最初の窓口のサービスを終えて次の窓口が空くのを待っていたとする。このとき、客 A の平均滞在時間を求めなさい。

問題 6.6 ある組織体はオスとメスからなっている。時間間隔 h の間に確率 $\lambda h + o(h)$ でランダムに一つのオスと一つのメスが出会い子を作る。子の性別はオスメスが五分五分である。時刻 t におけるオス、メスの人口をそれぞれ $N_1(t), N_2(t)$ とする。このとき $\{N_1(t), N_2(t)\}$ が連続時間のマルコフ連鎖になることを示し、そのパラメータ (各状態の滞在時間と、条件付推移確率) を決定しなさい。

問題 6.7 ある個体には二つの型がある。 A 型はパラメータ a の指数時間で B 型に変わり、 B 型はパラメータ b の指数時間後に二つの A 型に変わる。 A 型と B 型の個体数の変化を記述する連続時間のマルコフ連鎖モデルを作りなさい。

問題 6.8 2 台の機械を一人の修理工がメンテナンスしている。機械 i の稼働時間は平均 μ_i 分の 1 の指数分布に従う。修理時間は平均 μ 分の 1 の指数分布に従う。この状況を出生死亡過程で記述できるか。できるとすれば、そのパラメータを決めなさい。できないとすれば、どのようなモ

デルが考えられますか。

問題 6.9 パラメータ λ のポワソン過程に従って窓口が一つのサービスシステムに客が到着する。システム内に客が n 人いるとき、確率 a_n で行列の最後に並ぶ。サービス時間が平均 μ 分の 1 の指数分布に従うとき、このシステムは出生死亡過程としてモデル化できることを説明し、必要なパラメータを決めなさい。

問題 6.10 人口 N の集団で幾つかの個体が菌に侵されている。パラメータ λ のポワソン過程に従ってランダムに二つの個体が出会う。出会った二つの個体の一方が菌に侵され、もう一方が侵されていない場合は、確率 p で菌に侵されていない個体が侵されるものとする。いったん菌に犯されると元には戻れない。時点 t における菌に侵された個体の個数を $X(t)$ とする。このとき

- (1) $\{X(t), t \geq 0\}$ はマルコフ性を持つか。
- (2) どのような確率過程になるか、説明しなさい。
- (3) 最初菌に侵されている個体の個数が一つだった場合、 N 個すべての個体が菌に侵されるまでの時間の期待値を計算しなさい。

問題 6.11 パラメータ λ のポワソン過程に従ってクラブに入会し、 k ステージを経過した後正会員になることができる。各ステージを通過するためにはそれぞれ平均 μ 分の 1 の指数分布に従う時間がかかる。時刻 t にステージ k にいる会員の人数を $N_k(t)$ とする。 $N(t) = (N_1(t), N_2(t), \dots, N_{k-1}(t))$ とおいたとき、以下の質問に答えなさい。

- (1) $\{N(t), t \geq 0\}$ は連続時間のマルコフ連鎖か。
- (2) もしそうならば、生成行列を求めなさい。

問題 6.12 $\mu_n = \mu$ の純死亡過程について、推移確率関数 $p_{ik}(t)$ を求めなさい。

問題 6.13 一つの個体から出発するユール過程、すなわち $X(0) = 1$ とし、状態 k の時の出生率が $k\lambda$ の純出生過程を考えます。状態 k から $k+1$ へ推移するのに必要な時間を T_k とします。このとき

- (1) T_k は独立にパラメータ $k\lambda$ の指数分布に従うことを説明しなさい。
- (2) $X_1, X_2, \dots$ はいずれもパラメータ λ の指数分布に従う独立な確率変数、パラメータ $k\lambda, (k-1)\lambda, \dots, \lambda$ の指数分布に従う確率変数をそれぞれ $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ として、

$$\max(X_1, X_2, \dots, X_k) = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k$$

と表されることを説明しなさい。

- (3) 上の二つから以下の式が成り立つことを説明しなさい。

$$P(T_1 + T_2 + \dots + T_k < t) = (1 - e^{-\lambda t})^k$$

- (4) このことから、ユール過程の推移確率関数 $p_{1k}(t)$ は

$$P_{1k}(t) = (1 - e^{-\lambda t})^{k-1} - (1 - e^{-\lambda t})^k = e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{k-1}$$

すなわち、パラメータ $e^{-\lambda t}$ の幾何分布にしたがうことを説明しなさい。

7 待ち行列モデル

銀行のオンライン窓口、携帯電話の通話要求、高速道路の通行など、不特定多数の利用者が、特定の施設を自分の都合で利用するときに生じる混雑は社会生活の大きな影響を及ぼす。その混雑のメカニズムを知り、混雑を避ける工夫が要求される。このような問題を分析するための理論として待ち行列理論がある。

利用「者」は必ずしも人とは限らないし、「施設」といっても実態がある必要もない。

例 7.1 銀行のオンライン窓口の混雑：利用者は「口座の客」、サービス施設は「ATM機械」

例 7.2 高速道路の混雑：利用者は「車」、サービス施設は「高速道路」

例 7.3 生産ラインのボトルネック：利用者は「仕掛品」、サービス施設は「生産工程、機械」

例 7.4 インターネットの混雑：利用者は「アクセス信号」、サービス施設は「回線」

7.1 確率モデルの枠組み

利用者を客、サービス施設を待ち行列システム、サービスを提供する人を窓口あるいはサーバ、サービスを受ける時間をサービス時間という。「客」が「待ち行列システム」に「到着」して、「窓口」でのサービスを受け、「退去」する、「窓口」が空いていない（ほかの客へサービス中）場合は「待合室」で「待ち行列」を作って窓口が空くのを待つ。

客の到着過程を計数過程（たとえば、ポワソン過程）、サービス時間を確率分布とすると、待ち行列システム内の客数の時間変化が確率過程モデルとして、定式化できる。

7.1.1 ケンドールの記号

窓口が1種類の場合、待ち行列システムを記述する簡便法として、到着間隔の確率分布、サービス時間の確率分布、窓口の個数、の三つを「/」で区切って表記する方法がある。指数分布は M 、一点分布は D 、一般の分布は G あるいは GI などと表す。例えば $M/M/1$ と書いた場合、到着間隔とサービス時間分布は指数分布に従い、窓口は一つしかないモデルを表す。

7.1.2 ポワソン到着

不特定多数の客があるサービス施設のサービスを要求するためにやってくる場合、もし、個々の客の連携が無いとすれば、ある客が到着した直後でも、しばらく到着がない期間が続いた後でも、到着する可能性はいつも同じ、という無記憶性が成り立つと考えても良い。そうすると、客の到着間隔は指数分布に従うので、客の到着を事象の到着とみなす計数過程はポワソン過程になる。

あるいは、独立な計数過程をたくさん重ね合わせるとポワソン過程になるということを使って説明することも出来る。つまり、個々の客は勝手な確率過程に従って到着するのだが、サービス施設から見た場合、無数の計数過程が重ね合わさったものとして観測される。というわけで、客の到着間隔は指数分布にしたがい、到着時点列はポワソン過程に従うとしてよい。

実際、多くの実測データから、不特定多数の客の到着パターンとしてはポワソン過程が当てはまるものが多い、という実証的な研究もある。そこで、不特定多数の人がある共通の施設を利用する待ち行列モデルはポワソン到着を仮定することが多い。このような客の到着の仕方をポワソン到着という。

7.1.3 トラフィック密度

単位時間あたりの到着数と、単位時間あたりのサービス処理数のバランスで混雑具合が決まる。その比をトラフィック密度と定義する。単一窓口モデルの場合は、単位時間あたりの到着数（到着率、平均到着間隔の逆数）を λ 、平均サービス時間の逆数（サービス率）を μ として、 $\rho = \lambda/\mu$ がトラフィック密度。

$\rho > 1$ のとき、システム内の客数は定常分布を持たない。到着過程、サービス過程のどちらかが確率変動する場合は、 $\rho = 1$ 、つまり到着率とサービス処理率が等しい場合も、到着過程、あるいはサービス時間のどちらかが確率変動する場合、システム内の客数は定常分布を持たない。待ち行列理論では、通常、確率変動がある場合を扱うので、定常分布を計算したい場合は、トラフィック密度が 1 より小さいことを仮定する。この仮定した条件を定常条件、あるいは平衡条件という。

7.2 基本モデル (M/M/1)

ポワソン到着、指数（分布にしたがう）サービス時間、窓口が一つしかない待ち行列モデルはケンドールの記号で M/M/1 と表記される。平均到着間隔を $1/\lambda$ （到着率が λ ）、平均サービス時間を $1/\mu$ （サービス率が μ ）とすると、客が到着することを個体が生まれたと考え、退去することを個体が死亡したと考えることによって、出生率が常に λ 、死亡率が常に μ の出生死亡過程と等価なモデルになる。トラフィック密度は $\rho = \lambda/\mu$ と書ける。

7.2.1 平衡方程式、定常解

出生死亡過程の一般理論から、個体数、ここでは滞在客数、に関する平衡方程式

$$\begin{aligned}\lambda\pi_0 &= \mu\pi_1 \\ (\lambda + \mu)\pi_n &= \lambda\pi_{n-1} + \mu\pi_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots\end{aligned}\tag{7.1}$$

が得られるトラフィック密度 $\rho = \lambda/\mu < 1$ を仮定しているので、それを解くことができ、系内客数の定常分布が計算できる。

$$\pi_n = P(X = n) = (1 - \rho)\rho^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots\tag{7.2}$$

つまり、パラメータ ρ の幾何分布にしたがう（ただし、取り得る値は 0 以上の整数値）。

7.2.2 評価尺度

系内客数の定常分布から、興味のある様々な量が計算できる。サービスを提供する側から考えた場合は、稼働率、遊休時間の長さ、連続稼働時間の長さ、待ち行列の長さ、など、客の立場を考えると、すぐにサービスを受けられる確率、待ち時間、長待ち率（5 分以上待たされる可能性）、滞在時間、などが考えられる。以下順番に計算する。

(1) 窓口の稼働率

窓口がサービス中の時間割合を稼働率という。十分長い時間を T として、その間に滞在客数が 0 だった時間を T_0 とすると、 $1 - T_0/T$ が稼働率の近似的な値になる。 T が十分に大きければ、 T_0 はほぼ $T\pi_0$ に等しいので

$$1 - \frac{T_0}{T} \approx 1 - \pi_0 = \rho = P(X > 0) \quad (7.3)$$

となる。これは誰か滞在客がいる確率に等しい。

あるいは、定常状態になってから、システムをランダムに観測して、滞在客数をカウントした場合、観測回数を N 、そのうち、滞在客数が 0 だった観測回数を N_0 とすると、稼働率は $1 - N_0/N$ で近似できる。 N が十分に大きければ N_0/N は π_0 の近似値になるので、稼働率は $1 - \pi_0$ になる。

(2) 遊休時間 I の長さ

サービス終了後にサービス待ちの客がいない場合、次の客が到着するまでの時間を遊休時間 idle period という。客の到着間隔は指数分布に従うので、無記憶性により、遊休時間は客の到着間隔と等しい。したがって、

$$E(I) = \frac{1}{\lambda} \quad (7.4)$$

(3) 連続稼働時間 B の長さ

遊休時間が終わってから次の遊休時間が始まるまでの長さを稼働期間 busy period ということにする。それとその直後の遊休時間を合わせて稼働サイクル busy cycle という。平均的にみれば、稼働サイクルの中の稼働期間の比率は稼働率に等しい。十分長い時間 T の間に n 回の稼働サイクルがあったとして、 k 回目の稼働期間を B_k 、遊休期間を I_k とすると、

$$\frac{B_1 + B_2 + \cdots + B_n}{B_1 + I_1 + B_2 + I_2 + \cdots + B_n + I_n} \approx \rho$$

大数の法則から

$$\frac{E(B)}{E(B) + E(I)} = \rho \Rightarrow E(B) = \frac{1}{\mu} \frac{1}{1 - \rho} = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad (7.5)$$

(4) 平均系内客数 L

系内客数分布 π の期待値に等しいので

$$L = E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n \times \pi_n = \frac{\rho}{1 - \rho} \quad (7.6)$$

ρ が 1 に近づくにつれて、系内客数は急速に増加することが分かる。これが待ち行列現象の特徴的ふるまいである。

(5) 平均待ち行列長 L_q

待っている客の数は、サービス施設にいる客の中からサービス中の客を除けばよいので、

$$\max\{0, X - 1\}$$

と書くことが出来る。これを $(X - 1)^+$ と記すことにする。その期待値は次のようにして計算できる：

$$L_q = E(X - 1)^+ = \sum_{n=2}^{\infty} (n - 1)\pi_n = \frac{\rho^2}{1 - \rho} \quad (7.7)$$

この場合も平均系内客数と同様、混雑が激しくなるにつれて急速に状況が悪化して行くことが分かる。

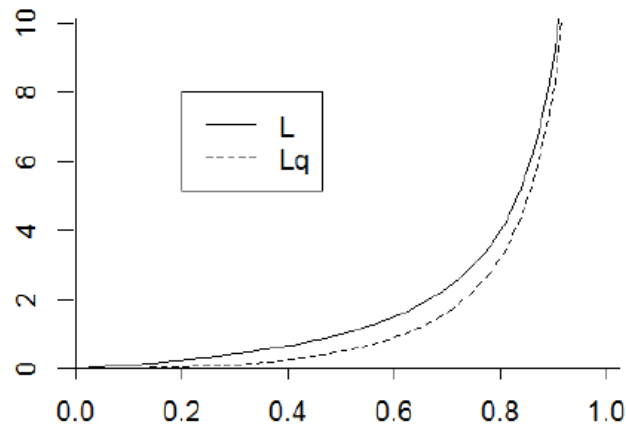


図 11 平均待ち行列長

練習 7.1 平均到着間隔が 10 分、平均サービス時間が 8 分の $M/M/1$ モデルで、1 回の稼働サイクル中に処理される平均客数を計算しなさい。平均到着間隔が 20 分になったとき、同じ問題を解きなさい。

練習 7.2 平均サービス時間が 10 分の指数分布でサービスする窓口パラメータ λ のポワソン過程で客が到着する $M/M/1$ 待ち行列モデルで、いろいろな λ の値に対して、平均待ち時間、平均滞在時間が分かるようなグラフを描きなさい。

7.2.3 PASTA

今まで計算してきたのは、長時間平均や極限分布に基づく計算で、いわば窓口運営者の視点での評価尺度になっている。客の立場から考えると、客が到着したときに見えるシステムの混雑具合が問題となるので、その目的に合わないかもしれない。例えば、予約診療のように、到着したときに前の客のサービスが終了していれば、客の評価として、そのシステムはすいているということになるが、窓口の稼働率が低いというわけではない。つまり、どの時点でシステムを観測するかによって、混雑具合、言い換えれば確率分布が異なる。一般に到着時点の確率分布と、長時間平均の確率分布、つまり定常分布は異なる。

しかし、客がポワソン過程に従って到着し、サービス時間はそれとは独立に決まる、という場合は、どの瞬間にも客が到着する可能性があるので、到着客は長時間平均の分布に遭遇することになる。この性質を **PASTA**(Poisson Arrivals See Time Average) と呼ぶ。この性質のおかげで、客にとって興味のある量も、定常分布を使って計算することが出来る。

(1) 到着したときに、すぐにサービスされる確率

すぐにサービスされるためには到着時点で客がいなければよい。*PASTA*の性質より、それは $P(X = 0)$ に等しく、 $1 - \rho$ となる。

(2) 平均待ち時間 W_q

到着した時点で誰もいなければ待ち時間は 0。1 人いたとすると、その客の残りサービス時間を待たされるのだが、残りサービス時間は指数分布の無記憶性により、まるまるサービス時間分と同じ。同様に考えて、到着した時点で n 人の客がいたとすると、待ち時間は n 個の指数分布の和になる。到着時点で系内にいる客の数は、*PASTA* の性質により定常状態における客の数と同じ。したがって、平均待ち時間は次のような計算になる。

$$W_q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\mu} \pi_n = \frac{1}{\mu} \frac{\rho}{1 - \rho} \quad (7.8)$$

平均待ち行列長 L_q と同様に、 ρ が 1 に近づく（混雑が激しくなる）につれて、滞在時間は急速に増大する。平均待ち行列長（式 7.7）と平均待ち時間の間には次の関係がある。

$$L_q = \lambda W_q$$

右辺は待っている間に到着する客の平均数であり、それが、ランダム時点での平均待ち行列に等しいということを表している。この単純な式はリトルの公式と呼ばれる。

(3) 平均滞在時間 W

滞在時間は、到着した時点で誰もいなければ、自分のサービス時間だけ、到着時点で先客が 1 人いたとすると、その客の残りサービス時間と自分のサービス時間の和になるが、残りサービス時間は指数分布の無記憶性により、まるまるサービス時間分と同じになる。同様に考えて、到着した時点で n 人の客がいたとすると、滞在時間は $n + 1$ 個の指数分布の和になる。到着時点で系内にいる客の数は、*PASTA* の性質により定常状態における客の数と同じだから、平均滞在時間は次のような計算になる。

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\mu} \pi_n = \frac{1}{\mu} \frac{1}{1 - \rho} = W_q + \frac{1}{\mu} \quad (7.9)$$

結果からみれば、平均滞在時間は平均待ち時間に平均サービス時間を加えたもの、という式で計算できることになる。平均系内客数 L （式 7.6）と平均滞在時間の間には次の関係がある。

$$L = \lambda W$$

退去するときに振り返ってみたとき並んでいる客の数が平均的な滞在客数に等しいということを意味している。これもリトルの公式と呼ばれる。

(4) 滞在時間の分布

モーメント母関数を使えば、平均滞在時間を計算する際の考え方を適用して滞在時間の分布が計算出来る。 $Y_1, Y_2, \dots$ を独立なサービス分布を表す確率変数とする。到着時点の客の数が X

ならば、到着客の滞在時間は $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{X+1}$ と書ける。したがって、滞在時間のモーメント母関数は

$$\begin{aligned} G(\theta) &= E(e^{\theta(Y_1+Y_2+\dots+Y_{X+1})}) = E(E(e^{\theta(Y_1+Y_2+\dots+Y_{X+1})} | X)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} G_Y(\theta)^{n+1} \rho^n (1-\rho) = \frac{(1-\rho)G_Y(\theta)}{1-\rho G_Y(\theta)} = \frac{\mu-\lambda}{\mu-\theta-\lambda} \\ &= \frac{\mu-\lambda}{(\mu-\lambda)-\theta} \end{aligned} \quad (7.10)$$

これは、滞在時間がパラメータ $\mu - \lambda$ の指数分布に従うことを表している。指数分布のランダム個数の和なので、指数分布が出てくるのだが、興味深い結果である。また、式 (7.5) と比べると、滞在時間の平均はシステムの平均稼働時間に等しいことが分かる。

練習 7.3 平均到着間隔が 5 分、平均サービス時間が 4 分の $M/M/1$ モデルで、滞在時間が平均サービス時間の 3 倍を超える確率を計算しなさい。

7.3 M/M 型拡張モデル

7.3.1 銀行の ATM のモデル、 $M/M/s$

ランダムに到着した客が先着順に複数の ATM でサービスを受けて退去する、すぐにサービスされない客はロープに沿って一列に並んで待つ、というよく見る光景を確率過程として考えると、複数窓口の待ち行列モデルとしてモデル化できる。

窓口の個数が s の待ち行列施設に、客がポワソン到着し、先着順に指数 (分布にしたがう) サービス時間のサービスを受ける、到着したとき窓口がすべて先着客に対してサービス中の場合は待ち行列を作って待つ、という待ち行列モデルは、ケンドールの記号で $M/M/s$ と記す。ATM 窓口は、サービス時間を指数分布と仮定すれば、このモデルで分析できる。

$M/M/s$ の系内客数 $X(t)$ の推移は平均到着間隔を $1/\lambda$ (到着率が λ)、平均サービス時間を $1/\mu$ (サービス率が μ) とすると、出生死亡過程で出生率が常に λ 、死亡率が $\min(n, s)\mu$ のものと確率的に等価になる。従って、系内客数の定常確率は、次の連立方程式の解になる。

$$\begin{aligned} \lambda\pi_0 &= \mu\pi_1 \\ (\lambda + n\mu)\pi_n &= \lambda\pi_{n-1} + (n+1)\mu\pi_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots, s-1 \\ (\lambda + s\mu)\pi_n &= \lambda\pi_{n-1} + s\mu\pi_{n+1}, \quad n = s, s+1, s+2, \dots \end{aligned} \quad (7.11)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$ を順番に足していくと、次のような簡単な式に置き換えることができる：

$$P(X = n) = \pi_n = \begin{cases} \frac{\lambda}{n\mu}\pi_{n-1}, & n = 1, 2, \dots, s \\ \frac{\lambda}{s\mu}\pi_{n-1}, & n = s+1, s+2, \dots \end{cases}$$

結局、

$$\begin{aligned} \pi_n &= \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \pi_0, \quad n = 1, 2, \dots, s \\ \pi_{s+n} &= \rho^n \pi_s, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7.12)$$

ただし、

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{\lambda}{s} \times \frac{1}{\mu} \quad (7.13)$$

と置いた。これは一人の平均サービス時間中に、到着する平均客数の s 分の 1 の形をしている。窓口の数が s あるので、平均的には一つの窓口は s 人の客のうちの一人を処理できれば、全体の待ち行列長が発散することはないと言える。したがって、これが 1 以下、というのが $M/M/s$ で定常分布が存在するための条件を表している。この定常条件が成り立っていれば、連立方程式は解くことができる。 π_0 は次の式で与えられる。

$$\pi_0 = \left\{ \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \frac{1}{1-\rho} \right\}^{-1}$$

$M/M/1$ の場合と同様に、系内客数の分布が分かると、いろいろな評価尺度が計算できる。

(1) 平均待ち行列長 L_q

$$L_q = E(X - s)^+ = \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \pi_s = \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \pi_0$$

(2) 平均待ち時間 W_q

リトルの公式を使って計算できる。

$$W_q = \frac{1}{\lambda} L_q = \frac{1}{\mu} \frac{1}{(1-\rho)^2} \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \pi_0$$

(3) 平均滞在時間 W

平均待ち時間に平均サービス時間を足せば良い。

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

(4) 平均系内客数 L

リトルの公式を使って、平均滞在時間から計算できる。

$$L = \lambda W = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

練習 7.4 到着率 λ 、サービス率 μ の $M/M/s$ モデルにおいて、定常状態時の一つの窓口の稼働率を計算しなさい。

練習 7.5 到着率 λ 、サービス率 μ の $M/M/1$ モデルの平均滞在客数と、到着率 λ 、サービス率 μ/s の $M/M/s$ モデル ($s = 2, 3$) の平均滞在客数のグラフを重ねて描きなさい。それをみて何が分かりますか？

以下、いくつかのモデルを並べるが、平衡方程式を書くことはやめにして、出生死亡過程の一般解に出生率、死亡率をあてはめることにしよう。出生率 $\{\lambda_i\}$ 、死亡率 $\{\mu_i\}$ が与えられると、定常条件

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i} < \infty \quad (7.14)$$

が成り立つときに、定常確率が次の式で計算することができることを思いだそう。

$$\begin{aligned} \pi_i &= \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i} \pi_0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \\ \pi_0 &= \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i} \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (7.15)$$

7.3.2 入場制限のないディズニールンドのモデル、 $M/M/\infty$

到着した客は直ちにサービスを受け、サービス終了と同時に退去する、という場合は、窓口が無限にある待ち行列施設を考えれば良い。この「待ち」のない待ち行列モデルは $M/M/\infty$ と表すことが出来る。待ち行列モデルと言っても「待ち」は発生しない。出生率、死亡率はそれぞれ

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \lambda, \quad i = 0, 1, 2, \dots \\ \mu_i &= i\mu, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7.16)$$

となり、

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i! \times \mu^i} = e^{\lambda/\mu} = \frac{1}{\pi_0}$$

なので、どんなに到着率が大きくてもいつかはサービス能力の方が高くなるので、常に平衡方程式を解くことが出来て、

$$\pi_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \pi_0 = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n e^{-\lambda/\mu}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

が得られる。つまり、系内客数はパラメータ λ/μ のポワソン分布に従う。

練習 7.6 $M/M/\infty$ モデルにおいて、平均滞在時間、平均系内客数を計算しなさい。

7.3.3 携帯電話の基地局のモデル、 $M/M/s/s$

携帯電話のアンテナに到着する通話要求は、その基地局で受け入れられる回線上限に達するまで受け付けられるが、回線が全部ふさがっているときに通話要求を出してもつながらない。接続している回線は、通話が終了すると、解放される。このとき、回線接続数の時間変化は、待ち行列モデルで表すことができる。電話システムの分析では、

- 「サービス施設」は「回線の交換器」、
- 「客の到着」は「通話要求の到着」、
- 「サービス時間」は「通話時間」、
- 「退去」は「通話終了」、

と解釈する。

客（通話要求）はきまぐれに到着するのでポワソン到着を仮定できる。窓口（回線）の個数を s とすると、系内客数が s の時に到着した客はサービスを受けずに立ち去る。電話の業界では、これを呼損という。サービス時間は指数分布とした場合、この待ち行列モデルを $M/M/s/s$ と記す。この場合も、誰かが待っているわけではない。

分析法は $M/M/s$ モデルと同じ、出生率が途中から 0 になると考えれば、 s から先の状態へ移ることがない出生死亡過程となる。

$$\frac{1}{\pi_0} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i} = \sum_{i=0}^s \frac{\lambda^i}{i! \times \mu^i} \equiv \sum_{i=0}^s \frac{a^i}{i!} < \infty$$

ここで、

$$a = \frac{\lambda}{\mu} \quad (7.17)$$

と置いた。 a には、一人の通話時間の間の通話要求の平均到着数という意味があり、電話の業界では呼量と呼ばれ、その単位はアーランとされている。アーラン Ehrang はスウェーデンの電話技師の名前で、確率モデルによる分析を電話システムの分析に適用した最初の人である。

したがって、系内客数（使用回線数）の定常確率は次で与えられる：

$$\pi_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \pi_0 = \frac{a^n / n!}{1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots + \frac{a^s}{s!}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, s$$

呼損率

電話システムで回線がすべて話し中のために、通話要求が拒否される確率をアーランの呼損率という。回線がすべて話し中、ということは系内客数が s という場合である。通話要求の到着はポワソン過程なので、PASTA の性質から、呼損の確率（呼損率）は系内客数が s 人の確率に等しい。呼損率を $B(a, s)$ とかく。

$$B(a, s) = \frac{\frac{a^s}{s!}}{1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots + \frac{a^s}{s!}}$$

s が大きくなったとき、 $s!$ を計算するのが困難になるので、次の漸化式を使って計算する。

$$\frac{1}{B(a, s)} = \frac{1}{B(a, s-1)} \frac{s}{a} + 1$$

証明はしないが、通話時間が指数分布と限らない一般の分布に従う場合、すなわち $M/G/s/s$ の場合も、呼損率は上の式で与えられることが分かっている。つまり、混雑の指標である呼損率は、通話時間の平均だけで決まり、分散などの高次のモーメントには依存しない。このように、分布に依存しないという性質は不感 insensitive と呼ばれる。

練習 7.7 $B(a, s)$ の漸化式が成り立つことを証明し、 $B(55, 64)$ を計算しなさい。

メールのように、実時間で送らなくても良いものは、回線がすべて使用中の場合は待たされることもある。といっても限度があるので、待つことが出来るのは $N - s$ だけ、と仮定すると、 $M/M/s/N$ モデルになる。その場合の待たされる確率も重要な性能評価尺度になる。

出生死亡過程を使った定常解析を適用すると、 $M/M/s$ モデルの場合を修正して

$$\pi_n = \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \pi_0, \quad n = 1, 2, \dots, s$$

$$\pi_{s+n} = \rho^n \pi_s, \quad n = 1, 2, \dots, N-s$$

という結果が得られる。 $\lambda/(s\mu)$ を ρ と置いた。この場合も、状態数は有限なので、無条件に定常分布が存在し、

$$\pi_0 = \left\{ \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \frac{1 - \rho^{N-s+1}}{1 - \rho} \right\}^{-1}$$

と計算できる。

待たされるのは到着したときに、回線がふさがっている場合なので、

$$\sum_{n=s}^N p(n) = p(s) \frac{1 - \rho^{N-s+1}}{1 - \rho} = \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \frac{1 - \rho^{N-s+1}}{1 - \rho} p(0)$$

が、到着呼が待たされる確率となる。

7.3.4 機械修理工のモデル

機械群を何人かの修理工がメンテナンスしている。故障すると、先着順で修理し、再び稼働させる。機械は N 台、修理工は一人、機械の稼働時間はパラメータ λ の指数分布に従い、修理時間はパラメータ μ の指数分布に従うとする。このとき、故障している機械の台数 X は出生死亡過程に従う。出生率、死亡率は

$$\lambda_i = (N-i)\lambda, \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\mu_i = \mu, \quad i = 1, 2, \dots, N$$
(7.18)

となる。従って X の定常分布は

$$\pi_i = \frac{N!}{(N-i)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i \pi_0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

ただし、

$$p(0) = \left\{ \sum_{i=0}^N \frac{N!}{(N-i)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i \right\}^{-1}$$

である。

練習 7.8 修理工が 2 人の場合はどうなりますか。

練習 7.9 故障する機械のために 1 台の予備機械があったとしたらどうなりますか。

練習 7.10 一般に修理工が M 人、予備の機械が L 台ある場合について、故障している機械台数の定常分布を計算しなさい。

7.4 非マルコフ型待ち行列モデル

7.4.1 一般のサービス時間モデル、 $M/G/1$

$M/M/1$ モデルでは、客はいつ来るかわからないし、サービスもいつ終わってもおかしくないというマルコフ性の仮定をおいているので、マルコフ過程モデル（出生死亡過程モデル）で系内客数の動きを分析することが出来た。もし、サービス時間がいつも決まって 10 分であるとか、少なくとも 5 分、多くても 20 分で終わる、というように無記憶性がない時は、単純にマルコフ過程を当てはめるわけにはいかない。なぜならば、現在サービス中の客のサービス経過時間の長さによって、将来の出来事が影響を受けるからである。システムの見方に工夫を凝らすことによってその動きを分析する方法を考えよう。

客はポワソン過程にしたがって到着し、窓口が一つしかないサービス施設で、先着順にサービスを受け、そのサービス時間は一般分布に従うという、単一窓口待ち行列モデルはケンドールの記号で書けば $M/G/1$ と表される。

連続時間で見るとき、客数の推移はマルコフ性を満たさないが、もし客の退去直後の系内客数の動きだけを調べてみれば、それはマルコフ的に推移していることが分かる。実際、 n 番目の客の退去直後の系内客数を X_n とし、 n 番目のサービス中に到着した客の数を Y_n とすれば、

$$X_n = \begin{cases} X_{n-1} + Y_n - 1, & \text{if } X_{n-1} > 0 \\ Y_n, & \text{if } X_{n-1} = 0 \end{cases}$$

という関係が成り立つ（確かめなさい）。到着には無記憶性があり、サービス時間の長さは独立だから、 X_n は X_{n-1} だけに依存し、 $X_{n-2}, X_{n-3}, \dots$ とは無関係。

実際

$$P(X_n = k) = P(X_{n-1} = 0)P(Y_n = k) + \sum_{i=1}^{k+1} P(X_{n-1} = i)P(Y_n = k - i + 1)$$

$$P(X_n = 0) = P(X_{n-1} = 0)P(Y_n = 0) + P(X_{n-1} = 1)P(Y_n = 0)$$

が成り立つ。到着率を λ 、サービス時間の累積分布関数を $F(t)$ とすると、 $Y_n = k$ の確率は、サービス時間に条件を付けて

$$a_k \equiv P(Y_n = k) = \int_0^\infty \frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda s} dF(s)$$

のように計算することが出来る。結局、行列表記すると以下ようになる。

$$p^{(n)} = p^{(n-1)} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \\ & a_0 & a_1 & a_2 & \\ & & a_0 & a_1 & \\ \mathbf{0} & & & \ddots & \end{pmatrix}$$

全体としてはマルコフ性がないけれど、マルコフ的に推移する時点が見いだせるとき、その時点に注目して解析していく方法を、隠れマルコフ連鎖法(imbedded Markov chain method) という。

練習 7.11 $j > 0$ のとき、 $P(X_n = k \mid X_{n-1} = j) = P(Y_n = k - j + 1)$ が成り立つことを示しなさい。 $j = 0$ の場合はどうなりますか。(上の X_n の式を参考にしなさい)

X_n の極限分布を

$$p_k = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k) \quad (7.19)$$

と置くと、離散時間のマルコフ連鎖の理論から、 π_k は平衡方程式を解くことによって得られるが、期待値を求めるだけならば、簡単な方法がある。

平均待ち行列長

S を 1 人のサービス時間、平均を m 、変動係数 (標準偏差を平均で割ったもの、指数分布の場合は 1) を c とすると、 Y_n のモーメントは以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= E(E(Y_n \mid S)) = \int_0^\infty E(Y_n \mid S = x) dF(x) = \int_0^\infty \lambda x dF(x) = \lambda E(S) = \rho \\ V(Y_n) &= V(E(Y_n \mid S)) + E(V(Y_n \mid S)) = c^2 \rho^2 + \rho \end{aligned}$$

ここで、 ρ は平均サービス時間中に到着する客数の平均、すなわちトラフィック密度を意味するので、定常条件として $\rho < 1$ と仮定する。

さて、あらたに、確率変数 Z_n として、 X_n が 0 のとき 0、さもなければ 1 という値を取るものと定義すると、

$$X_n = X_{n-1} + Y_n - Z_{n-1}$$

と表わすことができる。

X_n, Z_n は $n \rightarrow \infty$ のときそれぞれ X, Z に収束するとしよう。上の式の両辺の期待値を取り、 $n \rightarrow \infty$ とすると

$$E(Y) = E(Z) = \rho$$

が成り立つ。 Z の期待値は X が正の確率に等しく、これは窓口の稼働率なので、ここで得られた結果は $M/G/1$ でも $M/M/1$ でも、稼働率は同じということを意味する。

平均系内客数

また、

$$X_n = X_{n-1} + Y_n - Z_{n-1}$$

の両辺の 2 乗の期待値を取り、 $n \rightarrow \infty$ とすると

$$2E(X(Y - Z)) + E((Y - Z)^2) = 0$$

となる。 X, Z と Y は互いに独立、 XZ は X に等しく、 Z は 0 か 1 なので $E(Z^2)$ は $E(Z)$ に等しい、ということを使って上の式を書き換えると、

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{E(Y^2) - 2E(Y)E(Z) + E(Z)}{2(1 - E(Y))} = \frac{c^2 \rho^2 + \rho + \rho^2 - 2\rho^2 + \rho}{2(1 - \rho)} \\ &= \frac{1 + c^2}{2} \frac{\rho^2}{1 - \rho} + \rho \end{aligned}$$

が得られる。

$E(X)$ は客の退去直後の平均系内客数を表すが、これは到着直前の平均系内客数と言い換えてもよく、またポワソン到着を仮定しているので、PASTA 特性を適用して、任意時点での平均系内客数にもなっていることに注意しよう。

平均待ち行列長

また、リトルの公式から、 ρ はサービス中の客の平均となるので、平均待ち客数 L_q は

$$L_q = L - \rho = \frac{1 + c^2}{2} \frac{\rho^2}{1 - \rho}$$

で与えられる。指数分布の変動係数は 1 なので、それを上の式に代入すると、確かに $M/M/1$ の平均待ち行列長の公式が得られる。

平均待ち時間

平均待ち時間はリトルの公式から

$$W_q = \frac{1}{\lambda} L_q = \frac{1 + c^2}{2} \frac{\rho}{1 - \rho} m$$

となる。これはポラツェックヒンチンの公式と呼ばれる。この結果、

サービスのばらつきが大きくなれば平均待ち行列長（平均待ち時間）が増大し、その増え方に上限がない、

ということが分かる。また、サービス時間が一定の場合、すなわち $M/D/1$ モデルの場合でも、到着の変動により待ち時間は無くならないこと、その長さは $M/M/1$ モデルのちょうど半分になること、などが分かる。

練習 7.12 $M/G/1$ の平均滞在時間を計算しなさい。

練習 7.13 k -アーラン分布の変動係数を計算し、それをサービス時間とする $M/G/1$ の平均待ち時間が、平均サービス時間を同じにした $M/M/1$ の平均待ち時間の何倍になるかを計算しなさい。ただし、 k -アーラン分布の密度関数は以下で与えられるものとします。

$$f(x) = \frac{(k\mu)^k x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k\mu x}$$

定常確率分布

系内客数の定常分布が必要な場合、陽解を求めることはむづかしいので、確率母関数を使って解くことを考える。

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

と置くと、平衡方程式

$$p_k = a_k p_0 + \sum_{i=1}^{k+1} a_{k-i+1} p_i$$

の両辺に z^{k+1} を掛けて $k = 0, 1, \dots$ について和を取ると、

$$zP(z) = p_0 z A(z) + A(z)(P(z) - p_0) \Leftrightarrow P(z) = p_0 A(z) \frac{z-1}{z-A(z)}$$

が得られる。

未知定数 p_0 は、次のようにして計算できる。 $z = 1$ を代入すると左辺は 1、右辺は不定形なので、分母と分子を微分してロピタルの定理を使うと

$$p_0 A(z) \frac{z-1}{z-A(z)} \rightarrow p_0 = \frac{1}{1-A'(1)} \Leftrightarrow p_0 = 1 - A'(1) = 1 - \lambda m = 1 - \rho$$

となる。ここで、平均サービス時間を m と置いている。ここで出てきた ρ はサービス時間中に到着する客の平均なので、トラフィック密度という意味がある。結局、定常分布の確率母関数は次の式で与えられることが分かる。

$$P(z) = (1 - \rho) A(z) \frac{z-1}{z-A(z)}$$

特に $M/M/1$ の場合は

$$A(z) = \frac{\mu}{\mu + \lambda(1-z)}$$

なので、

$$P(z) = (1 - \rho) \frac{\mu}{\mu + \lambda(1-z)} \frac{z-1}{z - \frac{\mu}{\mu + \lambda(1-z)}} = \frac{1 - \rho}{1 - z\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \rho) \rho^n z^n$$

となる。これはパラメータ ρ の幾何分布の確率母関数に他ならない。

練習 7.14 確率母関数を微分することによって、平均系内客数が上で求めたものと一致することを確かめなさい。また、分散を計算しなさい。

7.4.2 一般の単一窓口モデル、 $GI/G/1$

到着間隔、サービス時間が一般の分布にしたがうような待ち行列モデルを $GI/G/1$ と略記する。到着がポワソン過程でないと、隠れマルコフ法も使えない。ここでは客の待ち時間に着目して解析しよう。 $n-1$ 番目の客と n 番目の客の到着間隔を T_n 、 n 番目の客のサービス時間を S_n とする。 T_n と S_n は互いに独立で、 $T_1, T_2, \dots$ と $S_1, S_2, \dots$ はそれぞれ同じ分布にしたがっているものとする。また、このモデルでも、定常条件として

$$\rho = \frac{E(S)}{E(T)} < 1$$

を仮定する。

さて、 n 番目の客の待ち時間を Y_n とすると、次のような関係が導かれる。

$$Y_{n+1} = \max(0, Y_n + S_n - T_{n+1})$$

S_n, T_{n+1} は Y_n とは独立なので、 Y_{n+1} は $Y_{n-1}, Y_{n-2}, \dots$ とは独立となり、 $\{Y_n\}$ がマルコフ性を持つということが言える。

Z_{n+1} を

$$Z_{n+1} = -\min(0, Y_n + S_n - T_{n+1})$$

で定義すると

$$Y_{n+1} - Z_{n+1} = Y_n + S_n - T_{n+1}$$

となる。これにたいして、 $M/G/1$ と同じように、両辺の期待値を取って $n \rightarrow \infty$ として

$$E(Z) = -E(S) + E(T) = E(T)(1 - \rho)$$

が得られ、両辺を 2 乗して期待値を取り、 $n \rightarrow \infty$ として

$$-2E(YZ) + E(Z^2) = 2E(Y(S - T)) + E((S - T)^2)$$

が得られる。 Y_n, Z_n はどちらかが必ず 0 であることと、 Y_n と $S_n - T_{n+1}$ は互いに独立であることを考慮すると、

$$E(Y) = \frac{E((S - T)^2) - E(Z^2)}{2(E(T) - E(S))} = \frac{V(S) + V(T) - V(Z)}{2E(T)(1 - \rho)}$$

が得られ、さらに書き換えると

$$E(Y) = \frac{c_a^2/\rho^2 + c_s^2}{2} \frac{\rho}{1 - \rho} E(S) - \frac{V(Z)}{2E(T)(1 - \rho)}$$

となる。ここで c_a, c_s は到着間隔、サービス時間の変動係数を表わす。

練習 7.15 $E(Y)$ の式が導かれることを確かめなさい。

Z の分散を求めるのは大変だが、分散は負にはならないので、平均待ち時間の上限として、結局次の不等式が導かれる。

$$E(Y) \leq \frac{c_a^2/\rho^2 + c_s^2}{2} \frac{\rho}{1 - \rho} E(S)$$

この上限値は ρ が 1 に近い（混雑している）ところで真の値に近く、近似式として有効である。たとえば到着がポワソン過程の場合（ $M/G/1$ ）は係数の分子 $c_a^2/\rho^2 + c_s^2$ を $1 + c_s^2$ としたものが真の値に等しいので、上限値との差は極めて小さいことがわかる。

練習 7.16 *Excel* を使って、サービス時間の変動係数が 3 であるような $M/G/1$ モデルの平均待ち時間のグラフを描きなさい。また、ポラツェックヒンチンの公式と上の近似式との相対誤差をいろいろな ρ の値に対して計算しなさい。

7.5 演習問題、その 1

問題 7.1 $M/M/1$ モデルについて、以下の計算をしなさい。

- (1) 一人のサービス時間中に到着する客の数の平均値はいくつですか。
- (2) 一人のサービス時間中に一人の客も到着しない確率はいくつですか。

問題 7.2 二人の客が三つの窓口の間を行ったり来たりする。ある窓口のサービスを受けた客はどちらか客のいない方の窓口へ進む。このような割り当て方から、常に二つの窓口が稼働しているということに注意する。もし、それぞれの窓口のサービス時間が指数分布に従い、その率が μ_1, μ_2, μ_3 で与えられるとき、窓口 $k (k = 1, 2, 3)$ が稼働していない時間比率を計算しなさい。

問題 7.3 到着率 λ 、サービス率 2μ の $M/M/1$ モデルにおける客の平均滞在時間は、到着率 λ 、サービス率 μ の $M/M/2$ モデルにおける客の平均滞在時間より短いことを証明しなさい。この事実を直感的に説明できますか。また、平均待ち時間について、同じようなことがいえますか。

問題 7.4 n 人の客が二つの窓口で交互にサービスを受けているとする。つまり、ある窓口のサービスを受けたら次はもう一方の窓口でサービスを受ける。先客がいれば待ち行列に並ぶものとします。各窓口のサービス時間はいずれも率 μ の指数分布に従うものとします。このとき、1 番目の窓口に客が k 人いる時間比率を計算しなさい。

問題 7.5 ある工場では率 λ のポワソン過程に従い製品を作り出して行く。製品倉庫の容量は K で、倉庫がいっぱいになると生産を止める。率 μ のポワソン過程に従って客が到着し、製品を買って行く。倉庫に在庫がないときは客は手ぶらで立ち去るものとします。このとき、

- (1) 手ぶらで立ち去る客の比率を計算しなさい。
- (2) 製品の倉庫での平均滞在時間を計算しなさい。
- (3) 倉庫内の製品の個数の期待値を計算しなさい。

倉庫に在庫がないときに来た客は待ち行列を作って待つ、としたらどうなりますか。ただし、待ち行列の長さは最長 n 人まで。すなわち、到着客が長さ n の待ち行列を見た場合は手ぶらで立ち去るものとします。このとき、

- (4) 客数と製品数を状態として、平衡方程式を立てなさい。
- (5) それが解けたとして、平均系内客数をその解で表現しなさい。

問題 7.6 m 人の客が窓口一つの施設を利用する。サービス時間は率 μ の指数分布に従い、サービス終了後は率 θ の指数分布に従う時間後に戻ってきて待ち行列に並ぶものとします。

- (1) 状態空間を定義し、平衡方程式を立てなさい。

その方程式の解を用いて、以下の計算をしなさい。

- (2) 客の到着率はいくつですか。
- (3) 1 回の訪問あたり、施設に滞在する時間の期待値を計算しなさい。

問題 7.7 客が 1 時間に 40 人の割合でポワソン到着し、単一窓口でサービスを受ける。客が二人以下しかいないときはサービス時間は平均 2 分の指数分布に従う。三人以上になると、臨時雇いが手伝うため、平均 1 分の指数分布に従う。システムには四人の客しか入れない。このとき、

- (1) 客が誰もいない確率はいくつか
- (2) 1 日の働きに対して 1 万円もらったとする。働いた時間に応じて分けるとする臨時雇いはいくらもらえることになるか。

問題 7.8 工場の機械群は 1 時間当たり 6 台故障する。故障の間隔は指数分布に従うという。この機械群の故障修理を担当するために一人の修理工が雇われ、彼は 1 時間当たり 8 台の故障を修理する。修理時間も指数分布に従うという。機械が故障して使えないと 1 時間あたり 10 イェン

の損、と見積もられている。単位時間当たりの損失はどれくらいか計算しなさい。

問題 7.9 管理者は M か A を雇うつもりで調べている。 M は時給 3 イェン、 A は時給 C イェン、 M は 1 時間当たり 20 人の客を処理することができる。 A は 1 時間当たり 30 人の客を処理することができる。両方とも処理時間は指数分布に従うという。管理者は客を 1 分待たせると 1 イェンのコストが発生すると見積もっている。客はこのシステムに 1 時間当たり 6 人の頻度で到着するものとする。このとき、 M が雇われたとすると、単位時間当たりの損失額はいくらですか。 A の場合はどうなりますか

問題 7.10 $M/M/1$ モデルで、客の待ち行列にいる時間が x 以下となる確率は次の式で与えられることを示しなさい。

$$\begin{cases} 1 - \frac{\lambda}{\mu} & x = 0 \text{ の場合} \\ 1 - \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-(\mu-\lambda)x}) & x > 0 \text{ の場合} \end{cases}$$

問題 7.11 (続き) W_Q^* を一人の客の待ち時間とすると、

$$W_Q^* = \begin{cases} 0 & \text{確率 } 1 - \lambda/\mu \text{ で} \\ \text{Exp}(\mu - \lambda) & \text{確率 } \lambda/\mu \text{ で} \end{cases}$$

と表せることを示しなさい。ただし $\text{Exp}(a)$ は率 a の指数分布に従う確率変数とする。また、この事実を使って W_Q^* の分散を計算しなさい。

問題 7.12 ポワソン到着指数サービスの単一窓口システムに対して、次のようなルールを追加します。すなわち、サービスを終了した客は確率 α でシステムから退去し、確率 $1 - \alpha$ でもう一度待ち行列の最後尾に並んでサービスを受けなおす、というものです。このとき

- (1) 平衡方程式をつくり、それが解けるための条件を求め、その条件の下で平衡方程式を解き、定常確率分布を計算しなさい。
- (2) 最初のサービスを受けるまでの待ち時間の期待値を求めなさい。
- (3) ちょうど n 回サービスを受けて退去する確率はいくつですか。
- (4) 客の総サービス時間の期待値はいくつですか (3) を使いなさい)
- (5) 客の総サービス時間の分布を求めなさい。(無記憶性がありますか)

問題 7.13 あるスーパーマーケットは二つのレジを持ち、パラメータ λ のポワソン過程に従って到着する客は、共通の待ち行列で並び、順番にサービスされる。レジ 2 は混雑時のバッファのようなもので、客が誰もいないときはレジ 2 は閉鎖される。レジ 1 のサービス中に新たな客が到着して待ちが発生すると、レジ 2 を開けてサービスし、レジ 2 はサービスを終了したときに待ち客がいなければ再び閉鎖される。待ち客がいる限り、レジ 2 はサービスを続ける。レジ 1 は客がいなくても閉鎖はしない。レジのサービス時間は両方とも率 μ の指数サービス時間とする。このとき、

- (1) p_n を客が n 人いる相対時間比率 (十分に長い観測時間 T の間に客が n 人いる時間を T_n としたとき T_n/T) に関する方程式を作り、それを解きなさい。
- (2) 客が 0 人から一人に推移する率はいくつですか。二人から一人に推移する率はいくつですか
- (3) 臨時のレジ係がレジにいない確率 (相対時間) はいくつですか。

(ヒント $M/M/2$ とどこが違うのか、客の到着退去をトレースして状態推移図を作りながら考えなさい。単純な出生死亡過程にはなりません)

問題 7.14 $M/M/s/s$ モデルで到着率 λ 、サービス率 μ としたとき、平衡方程式を書き、系内客数の定常分布を計算しなさい。 $a = \lambda/\mu = 20$ として、系内客数が s 人いる定常確率を、 s の関数と見て、そのグラフを描きなさい。

問題 7.15 (行列が余り長いと、並ばないで立ち去ってしまうという現象のモデル化) 客が到着したとき系内客数が n だったとすると、確率 r_n で行列の最後尾に並び、 $1 - r_n$ でサービスを受けずに立ち去るものとする ($n > N$ のとき $r_n = 0$ 、 $n \leq N$ のとき $r_n = 1$ としたものは有限待ち行列モデルと呼ばれる)。 $X(t)$ を時刻 t での系内客数とし、到着はパラメータ λ のポワソン過程、窓口は一つで平均 μ^{-1} の指数分布にしたがってサービスされる。

- (1) $X(t)$ は出生死亡過程でモデル化できることを示し、出生率、死亡率を求めなさい。
- (2) 平衡方程式を書いて、それを解きなさい。
- (3) 長い時間観測したとき、サービスを受けずに立ち去る客の数の単位時間あたり平均、全体の到着客に対する比率を求めなさい。
- (4) $\{r_n\} = \{1, 1, 1, 1, 0.8, 0.5, 0.2, 0, 0, \dots\}$ としたとき、サービス率の変化に対して立ち去る客の比率がどう変化していくかを調べ、グラフ化しなさい ($\lambda = 1$ とする)

問題 7.16 (救急病院の急患と普通の患者に対する治療のモデル化) 一つの窓口に甲、乙 2 種類の客が来てサービスを要求する。甲組の客は乙組の客にたいして優先的にサービスされる。乙組の客がサービス中のところへ甲組の客が到着したら乙組の客のサービスを中断してすぐに甲組の客へのサービスが開始される。それぞれの組の客はパラメータ λ_1, λ_2 のポワソン過程で到着し、平均 μ_1^{-1}, μ_2^{-1} の指数分布にしたがってサービスされる。 $X_1(t), X_2(t)$ をそれぞれ時刻 t における甲組、乙組の系内客数とする。 $\rho_1 = \lambda_1/\mu_1, \rho_2 = \lambda_2/\mu_2$ としたとき

- (1) $X_1(t)$ は出生率 λ_1 、死亡率 μ_1 の出生死亡過程となり、 $\rho_1 < 1$ のとき定常分布が存在して、それが幾何分布で表わされることを示しなさい
- (2) $\{X_1(t), X_2(t)\}$ はマルコフ過程になることを示し、微小時間内に状態 (j, k) から 1 ステップで推移する状態とその推移率を列挙しなさい。
- (3) 平衡方程式を作りなさい。

7.6 ネットワーク型待ち行列モデル

複数の異なるタイプのサービスを提供している施設が集まって一つのサービス施設を作っているような場合の混雑現象を分析するために、ネットワーク型の待ち行列システムを考える場合がある。カフェテリアで、品物を順番に選んで最後にレジで支払いをする、あるいは、修理工場のよう、検査、故障のタイプによって振り分け、修理、検査、不合格品は再調整、などと枝分かれしながらいろいろな工程を通過する、というようなイメージである。

7.6.1 生産ラインのモデル、直列型モデル

枝分かれをしないで、順番にいくつかのサービスを受けていくような場合のモデルとして直列型待ち行列モデルがある。

ある窓口でサービスを受けた客は次の窓口に進み、そこでサービスを受ける、もしすでに前の客がサービス中ならば待ち行列を作って待つ、という待ち行列モデルを直列型待ち行列モデルという。

このモデルでは、それぞれの窓口での混雑を個々に調べることに加えて、同時的ふるまいを調べることが目的である。

例えば、待ち行列が二つ連なった場合を考えよう。客はパラメータ λ のポワソン過程で第一の待ち行列に到着し、平均 μ_1^{-1} の指数時間サービスを受ける、サービス終了後第2の窓口へ進み、そこで平均 μ_2^{-1} の指数時間サービスを受ける、そのサービスが終了すると、このシステムから退去するものとする。

時刻 t における各待ち行列の長さを $N_1(t), N_2(t)$ とすると、 $\{N_1(t), N_2(t)\}$ はポワソン過程、指数サービスの仮定よりマルコフ過程になることがわかる。

7.6.2 待ちが許されない場合、マルコフ過程モデル

簡単のために、最初の窓口でサービス中の場合、新たに到着した客は待つことが出来ず、立ち去るものとし、二つの窓口の間には待つ場所が無いものとしよう。そのため、二番目の窓口がふさがっているとき、最初の窓口のサービスを終えても、その客は次へ進めないため、最初の窓口をふさいだまま、二番目の窓口のサービスが終了するまで待たされるものとする。つまり、一番目の窓口をブロックしてしまう。もちろん、新しい到着客を受け入れることも出来ない。

このモデルでは、取り得る状態は $(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)$ という4状態の他に、一番目の窓口がブロックされているという状態（それを $(B, 1)$ と記す）を考える必要がある。到着率を λ 、両窓口のサービス率をそれぞれ μ_1, μ_2 とすると、この5状態のマルコフ過程の生成行列が次のようになることは、出生死亡過程と同じように、時刻 t で状態が (j, k) であったとき、 Δt 後にどうなる可能性があるか、ということを全部リストアップしてみれば理解できるはず。

$$A = \begin{matrix} (0, 0) \\ (1, 0) \\ (0, 1) \\ (1, 1) \\ (B, 1) \end{matrix} \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1 & \mu_1 & 0 & 0 \\ \mu_2 & 0 & -\lambda - \mu_2 & \lambda & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & -\mu_1 - \mu_2 & \mu_1 \\ 0 & 0 & \mu_2 & 0 & -\mu_2 \end{pmatrix}$$

状態が (j, k) の定常確率を $\pi(j, k)$ と表すことにすると、平衡方程式を解くことによって次の式が導かれる。

$$\begin{aligned}\pi(1, 0) &= c \frac{\lambda}{\mu_1} \left(1 + \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} \right), \pi(0, 1) = c \frac{\lambda}{\mu_2}, \\ \pi(1, 1) &= c \frac{\lambda}{\mu_2} \left(\frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} \right), \pi(B, 1) = c \frac{\lambda \mu_1}{\mu_2^2} \left(\frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} \right) \\ \pi(0, 0) &= c = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu_1} + \frac{\lambda}{\mu_2} + \left(\frac{\lambda}{\mu_1} + \frac{\lambda}{\mu_2} + \frac{\lambda \mu_1}{\mu_2^2} \right) \left(\frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} \right) \right)^{-1}\end{aligned}$$

練習 7.17 定常状態確率が上のように与えられることを導き、 $\lambda = 1, \mu_1 = \mu_2 = 2$ の場合のブロック確率、窓口 2 の稼働率を計算しなさい。

7.6.3 待ちが許される場合、マルコフ過程モデル

最初の窓口の前に待合室があって、すぐにサービスされない到着客はそこで待つことが出来るとした場合も、上と同じような考え方でモデル化できるが、最初の窓口でサービス終了後ブロックしている客の扱いに注意が必要である。例えば、最初の窓口に 4 人の客がいるという状態には、窓口が稼働している場合と、サービスが終了していて、次の窓口がふさがっているために前に進めないという場合の二通りが考えられる。それを分けるために、 X_1 として、最初の窓口のサービスが終了していない客の数、 X_2 として、最初の窓口のサービスを終了した客の数、と定義することにすると、 (X_1, X_2) の取り得る値は、 X_1 が 0 以上、 $X_2 = 0, 1, 2$ のいずれかになる。 $X_2 = 2$ のとき、仮定により最初の窓口のサービスが行われないことに注意する。

(X_1, X_2) はマルコフ過程になり、その平衡方程式は次のようになる。状態 $(n, 2)$ では二番目の窓口だけが動いているということに注意。

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu_1)\pi(n, 0) &= \lambda\pi(n-1, 0) + \mu_2\pi(n, 1), \quad n = 1, 2, \dots \\ (\lambda + \mu_1 + \mu_2)\pi(n, 1) &= \lambda\pi(n-1, 1) + \mu_1\pi(n+1, 0) + \mu_2\pi(n, 2), \quad n = 1, 2, \dots \\ (\lambda + \mu_2)\pi(n, 2) &= \lambda\pi(n-1, 2) + \mu_1\pi(n+1, 1), \quad n = 1, 2, \dots \\ \lambda\pi(0, 0) &= \mu_2\pi(0, 1) \\ (\lambda + \mu_2)\pi(0, 1) &= \mu_1\pi(1, 0) + \mu_2\pi(0, 2) \\ (\lambda + \mu_2)\pi(0, 2) &= \mu_1\pi(1, 1)\end{aligned}$$

このシステムでは遅いサービス率以上のスピードで客が到着すると処理しきれないことは明らか。このようなサービス率の（最も）遅い窓口はボトルネックと呼ばれる。したがって、

$$\lambda < \min \{\mu_1, \mu_2\}$$

が定常分布が存在するための条件になる。あとはその平衡方程式を解くだけ、とはいっても母関数を使ってかなり面倒くさいことになり、あまり見通しの良い結果は期待できない。

7.6.4 待ちが許される場合、積形式解

二つの窓口の間でも客が無制限に待つことが出来る場合は、もう少しスマートな解を求めることが出来る。この場合は最初の窓口がブロックされることはないので、単純にそれぞれの窓口 j, k の客がいることを状態 (j, k) とすれば、その平衡方程式は上の場合と同様に考えて、次のよ

うに書くことが出来る。

$$\begin{cases} \lambda\pi(0,0) = \mu_2\pi(0,1) \\ (\lambda + \mu_1)\pi(j,0) = \lambda\pi(j-1,0) + \mu_2\pi(j,1) & (j=1,2,\dots) \\ (\lambda + \mu_2)\pi(0,k) = \mu_1\pi(1,k-1) + \mu_2\pi(0,k+1) \\ (\lambda + \mu_1 + \mu_2)\pi(j,k) = \lambda\pi(j-1,k) + \mu_1\pi(j+1,k-1) + \mu_2\pi(j,k+1) & (j,k=1,2,\dots) \end{cases}$$

この連立方程式の解は次のようにして推量することが出来るかもしれない。窓口 2 を気にしないで、窓口 1 の動きだけに注目すると、客の動きは窓口 2 の混雑具合によって何も影響を受けることはない。ということは、前に分析しておいた $M/M/1$ となんら変わりがない、ということになる。したがって、窓口 1 だけの周辺分布はパラメータ $\rho_1 = \lambda/\mu_1$ の幾何分布になるはず。その場合、定常分布が存在するためには到着率がサービス率より小さくなければならない。

窓口 2 について考えてみると、窓口 1 が稼働中ならばサービス時間の無記憶性により、客はポワソン過程にしたがって到着しているように見えるはず。窓口 1 が空いてから次の客が退去するまでには到着間隔とサービス時間を足した間隔になるが、窓口 1 がいつ空き状態になるのかはランダム事象で、客の退去もランダムに見えなくもない。そうすると、窓口 2 についても、客の到着過程をポワソン過程とみなして $M/M/1$ を適用することはあながち不自然とも言えないだろう。その場合の到着率は窓口 1 の存在とは無関係に λ となるはず（到着した客は必ず最初の窓口を通過するから）。

そこで、窓口 2 の周辺分布にパラメータ $\rho_2 = \lambda/\mu_2$ の幾何分布を当てはめ、さらに、窓口 1 と窓口 2 が独立と考えた場合の確率分布

$$\pi(j,k) = (1-\rho_1)\rho_1^j(1-\rho_2)\rho_2^k \quad (j,k=0,1,2,\dots)$$

を「仮の」解として上の方程式に代入してみる。そうすると、見事にこれらの値は平衡方程式を満足するので、解の候補となる。そして、解があればそれが唯一の解、というマルコフ過程の一般論から、これが真の解を与えることが分かる。解が存在するための条件は

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} < 1, \rho_2 = \frac{\lambda}{\mu_2} < 1$$

のとき、あるいは

$$\lambda < \min\{\mu_1, \mu_2\}$$

が成り立つことである。この条件は、間に待合室がないモデルの場合と同じで、ボトルネックが制約になるということから明らか。

練習 7.18 与えられた $\pi(j,k)$ の式が連立方程式を満たすことを確かめなさい。

$\pi(j,k)$ はサービス率が μ_1 と μ_2 の二つの $M/M/1$ の定常確率の積になっていることに注意しよう。このような解は積形式解と呼ばれている。

実際、第 1 の施設からの退去過程すなわち第 2 の施設への到着過程は、第 1 の施設への到着過程と同じパラメータ λ のポワソン過程になることが分かっているので、二つの窓口の系内客数が独立、という解の形がそれで説明できる。

それぞれの施設での待ち時間に関していえば、最初の施設でたっぴり待たされれば、次の施設でもかなり待つことを覚悟しなければならないというように、両者は互いに独立でないのに、施設内の客の数については独立性があるというのは興味深い。

$M/M/1$ の退去過程は到着と同じポワソン過程に従うということから、指数サービス時間に従う単一窓口の待ち行列が直列につながったようなシステムの場合は、窓口がいくつつながっていても、各窓口の行列長の結合分布は、個々の窓口を $M/M/1$ とみなして計算したものを掛け合わせたものに等しいということになる（本当?）。

7.6.5 ネットワーク型待ち行列モデル

直列型モデルのように、サービスを受ける施設の順番が必ずしも決まっておらず、複数あるサービス窓口の間を客が自由に動き回る場合はどうなるだろうか。次のような理想化された場合を考えよう。

(1) ジャクソン型待ち行列モデル

サービス施設が 1 から K まで K 個あり、客は各施設に外部からパラメータ $\lambda_1, \dots, \lambda_K$ のポワソン過程にしたがって到着する。サービスは指数分布にしたがって行なわれ、施設 j でのサービスが終わると、過去の経過とは無関係に確率 p_{jk} で施設 k に移動するか、確率 $1 - \sum_k p_{jk}$ で退去する、というモデルをジャクソン型待ち行列モデルという。

実際には、一人一人の客は目的をもっていくつかの施設を順番に回っているだろうが、客全体としてみた場合は、ある施設のサービスを終了した客はランダムに次の施設に移動しているように見えるのではないか、というのが上の考え方の基本になっている。

このように仮定したことにより、システムの動きは各施設の客数を状態とするマルコフ過程としてモデル化できる。施設 k の平均サービス時間を μ_k^{-1} とし、 α_k を連立方程式

$$x_k = \lambda_k + \sum_{j=1}^K x_j p_{jk} \quad (k = 1, 2, \dots, K)$$

をみたす解とする。（ただし、 p_{jk} は解 α_k がユニークに決まるようなものと仮定）。

$$\rho_k = \frac{\alpha_k}{\mu_k} < 1 \quad (k = 1, 2, \dots, K)$$

この α_k は単位時間あたりに施設 k の外部からと内部から到着する客の数ということができる。実際、施設 k に到着する客は、外部から直接到着する客と、施設 j のサービスを終了した客の内の $100p_{jk}\%$ から成り立っている。方程式の両辺に時間間隔 T を掛けて人数の関係式に置き換えてみると、この方程式は今説明したことにほかならない。

施設 1 に n_1 人、...、施設 K に n_K 人いるという定常確率は、次のように積形式で表わされることが分かっている。

$$\pi(n_1, n_2, \dots, n_K) = \prod_{k=1}^K (1 - \rho_k) \rho_k^{n_k} \quad (n_1, n_2, \dots, n_K = 0, 1, 2, \dots)$$

α_k は施設 k に単位時間あたりに到着する客の数と考えられるので、この場合も前と同様、 K 個の施設を別々に考えて、計算した結果を組み合わせたような形になっていると考えられる。

練習 7.19 すべての客が施設 1 に到着し、そこでのサービス終了後確率 2 分の 1 で施設 2 か施設 3 へ移動し、そこでのサービスを終了したらシステムから退去する、という動きをジャクソン型待ち行列モデルでモデル化して、平衡方程式を立てなさい。ただし、施設 1 への到着率は 1、施

設 1、2、3 のサービス率はそれぞれ、3, 1, 2 とします。 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を求めなさい。積形式解を作り、それが平衡方程式を満たすことを確かめなさい。

(2) 閉鎖型ネットワーク待ち行列モデル

次に入場制限のあるネットワークモデルを考えよう。ネットワークの中を常に N 人の客が動き回っていて、外からの到着を考えない場合、各施設での待ち行列の長さはどうなるのかという問題。これはまた、到着客が非常に多く、常に客が外に行列を作っていて、1 人が退去すると外の待ち行列の先頭の客が 1 人だけ中にはいれるというような状況を考えてもよい。このようなモデルを閉鎖型ネットワークモデルという。

客の動きは上で考えた客の数に制限のないモデルと、到着を除いて同様とする。 α_k を連立方程式

$$x_1 = 1, x_k = \sum_{j=1}^K x_j p_{jk} \quad (k = 2, \dots, K)$$

をみたす解とし、

$$\rho_k = \frac{\alpha_k}{\mu_k} \quad (k = 1, 2, \dots, K)$$

とおく。 α_k は施設 1 のサービスを終えてから、次に施設 1 に戻ってくるまでに、施設 k のサービスを何回受けるか、という平均訪問回数を表していることに注意。したがって、 $\rho_1, \dots, \rho_K$ は各施設の相対的混雑指標になっている。

そうすると、施設 1 に n_1 人、...、施設 K に n_K 人いるという定常確率は

$$\pi(n_1, n_2, \dots, n_K) = \frac{1}{G(N, K)} \prod_{k=1}^K \rho_k^{n_k} \quad (n_1 + n_2 + \dots + n_K = N)$$

のように、積形式で表されることが分かっている。この場合は今までと違い、 $n_1, n_2, \dots, n_K$ は足してちょうど N になるような組み合わせしか取れないので、一つ一つの施設を独立に考えるわけにはいかない。 $G(N, K)$ は $\pi(n_1, \dots, n_K)$ の和を 1 にするような定数で、正規化定数と呼ばれる。

$$G(N, K) = \sum_{n_1 + n_2 + \dots + n_K = N} \prod_{k=1}^K \rho_k^{n_k}$$

また、この場合は ρ_k が 1 より小さくなくても定常確率が計算できる。

練習 7.20 施設 1 のサービスが終わると、確率 4 分の 1 で施設 2 へ、確率 4 分の 3 で施設 3 へ移り、施設 2 あるいは施設 3 のサービスを終えた客は施設 1 へ戻る、という動きをしているシステムを考えます。システム内には 3 人の客がいるものとします。また、各施設のサービスは平均がそれぞれ 2, 4, 5 の指数分布に従うものとします。このとき、各施設の滞在客数ベクトルに関する平衡方程式を立てなさい。 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を求めなさい。 $G(N, K)$ を計算し、それを使った解の形が平衡方程式を満たすことを確かめなさい。

この定常確率を使えばいろいろな特性量が計算できる。施設 k の単位時間当たりの退去客数をスルーットというが、それは以下の式で与えられる

$$\theta_k(N) = \sum_{n_1, \dots, n_K} \mu_k \pi(n_1, \dots, n_K) = \alpha_k \frac{G(N-1, K)}{G(N, K)}$$

施設 k に客がいる確率を施設 k の稼働率というが、それは次のように計算できる

$$u_k(N) = \sum_{n_k > 0} \pi(n_1, \dots, n_K) = \rho_k \frac{G(N-1, K)}{G(N, K)}$$

また、施設 k の平均滞在客数は次の漸化式で与えられる

$$L_k(N) = \sum_{n_1, \dots, n_K} n_k \pi(n_1, \dots, n_K) = u_k(N)(1 + L_k(N-1))$$

平均滞在時間はリトルの公式を使って導くことができる

$$W_k(N) = \frac{L_k(N)}{\theta_k(N)}$$

また施設 k に n 人いる確率（周辺分布）は

$$\pi_k(n; N) = \sum_{n_k = n} \pi(n_1, \dots, n_K) = \rho_k^n \frac{G(N-n, K) - \rho_k G(N-n-1, K)}{G(N, K)}$$

となる。

このように、各特性量は正規化定数を使って求められる。正規化定数自体は次のような漸化式で計算することができるが

$$\begin{aligned} G(0, k) &= 1, G(n, 1) = \rho_1^n \\ G(n, k) &= G(n, k-1) + \rho_k G(n-1, k) \end{aligned}$$

N, K が大きくなったとき、この方法を実際に計算機で計算させると桁落ちや、溢れが生じて問題が多いので、計算上の様々な工夫が必要となる。

7.7 待ち行列モデルにおける最適化問題

待ち行列モデルの解析は、モデルの確率特性を明らかにすることが主な目的になっているが、その結果を用いて最適化問題にアプローチすることもできる。

例 7.5（サービス能力の最適化）客の待ち時間が長いということはサービス水準の低いということであり、将来の需要に悪影響を与えるという意味で、待ち時間イコールコストという考え方が成り立つ。そのコストを削減するためにはサービス効率を上げなければいけない。そのためには必要な投資をして施設を改善しなければいけないからコストがかかる。結局、サービス施設を運営するためにはサービス水準を維持するためのコストと、客を待たせることによって生じるコストをバランスさせることが必要になる。

最適コスト問題の一つのアプローチとして、サービス率 μ に比例して維持コストがかかる、客の待ち時間に比例して（将来の）機会コストがかかると仮定したとき、最適なサービス率はいくつか、という定式化が考えられる。 $M/M/1$ モデルで考えると、到着率を λ 、 $\rho = \lambda/\mu$ 、サービスの維持コストを A 、客の待ち時間コストを B とすると、トータルコストは

$$A\mu + \frac{B}{\mu} \frac{\rho}{1-\rho}$$

で与えられるから、その最適化問題になる。

例 7.6 (待つか待たざるべきか) (To queue or not to queue) 高速の入り口で行列している場合、そのまま一般道を走るか、待ち行列に並ぶか、という判断を迫られることがある。このようなケースを待ち行列的に考えれば、サービスを受けることによって得られる効用と、待つことによるマイナスの効用を比べ、効用が大きければ待ち行列に並び、さもなければサービスを受けずに立ち去る、というような定式化が出来る。待ち時間が長くなるにつれて効用は単調に減少すると考えれば、到着したとき先客が L 人以上いたならば並ばずに立ち去る、というのが個人にとって最適な行動という意味で、最適な L が一意に定まる。

例 7.7 (待たせるべきか断るべきか) 同じ問題を利用者全体の効用最大化の立場から考えることも出来る。客待ちタクシー乗り場で、空タクシーの駐車スペースを制限するようなもので、施設の提供側が待ち行列がある一定数に達したら、それ以上到着した客を断る、という制御をする場合である。待合室の大きさを M 、1 人のサービスによる利得を R 、1 人が 1 単位時間待つコストを C 、としたとき、 M をいくつにしたら、利得が最大になるか、という問題に定式化できる。

演習問題、その 2

問題 7.17 中間バッファが一つしかない二段の生産工程のモデル。 $M/M/1$ からの退去客はもう一つの指数サービスする単一窓口に着いてサービスを受ける。第二の窓口がサービス中の場合は専用の待ち場所で待つが、そこもふさがっているときは、第一の(今サービスを終了した)窓口を占有して待ち、その後に並んでいる客のサービス開始をブロックする。第二窓口の待ち場所が空いたらそこに移動し、第一窓口のサービスが再開する。到着率を λ 、第 k 窓口のサービス率を $\mu_k (k = 1, 2)$ としたとき、定常条件はどうなりますか。その条件の下で、平均滞在時間を計算しなさい。ただし、 $\lambda = 0.5, \mu_1 = 1, \mu_2 = 1.5$ とします。

問題 7.18 中間バッファを置かない代わりに 2 段目の工程に機械を 2 台置いた場合。 $M/M/1$ からの退去客はもう一つの指数サービスする二つの窓口の一つに着いてサービスを受ける。第二の窓口が両方ともサービス中の場合は、第一の(今サービスを終了した)窓口を占有して待ち、その後に並んでいる客のサービス開始をブロックする。第二窓口のどちらかが空いたらそこに移動し、第 1 窓口のサービスが再開する。到着率を λ 、第 k 窓口のサービス率を $\mu_k (k = 1, 2)$ としたとき、定常条件はどうなりますか。その条件の下で、平均滞在時間を計算しなさい。ただし、 $\lambda = 0.5, \mu_1 = 1, \mu_2 = 1.5$ とします。

問題 7.19 部品はあらかじめ大量にストックされている生産工程のモデル。指数サービスする窓口が直列に三つつながっている。窓口 1、2、3 の順にサービスを受けて窓口 3 のサービスが終了したら退去する。窓口 1 の前には無限の客が待っていて、空くと直ちにサービスが開始される。窓口 2、3 の前には待つことは許されない。窓口 k のサービスが終了したとき、窓口 $k+1$ がふさがっていれば、窓口 k でサービス終了した客はそこで待機し、窓口 k をブロックする(サービスを「ふさぐ」)。その後、窓口 $k+1$ が空いたら直ちに窓口 k をブロックしている客は窓口 $k+1$ へ進む。窓口 1 と 2 が同時にブロックされた状態で、窓口 3 のサービスが終了すると、窓口 1、2 の客は同時に次の窓口へ進む。窓口 k のサービス率を μ_k としたとき、このシステムの定常条件を求めなさい。その条件の下で、各窓口の稼働率を計算しなさい。また、 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$ のとき、システムのスループット(単位時間あたりの窓口 3 からの退去数)

を計算しなさい。

問題 7.20 (ベルトコンベヤーに複数の人がはり付いて作業している場合のモデル化) 客が到着して最初の窓口が空いていればそこでサービスを受けて退去する。もしふさがっていれば、次の窓口でサービスを受ける。そこもふさがっている場合はサービスを受けずに立ち去るものとする。到着はパラメータ λ のポワソン過程にしたがい、窓口でのサービス時間は平均 μ_1^{-1}, μ_2^{-1} の指数分布にしたがっているものとする。 $X_1(t), X_2(t)$ をそれぞれ時刻 t における窓口 1、2 の客の数とすると、 $\{X_1(t), X_2(t)\}$ は 4 状態のマルコフ過程になる。

- (1) 生成行列を求めなさい
- (2) 平衡方程式を作り、それを解きなさい
- (3) $\lambda = 1, \mu_1 = 1, \mu_2 = 2$ のとき呼損率 (損失確率) を計算しなさい
- (4) $\lambda = 1, \mu_1 = 2, \mu_2 = 1$ のとき呼損率 (損失確率) を計算しなさい。(う)と比較して何がわかりますか。
- (5) 能力の違う二つの窓口はどちらを先に置いたほうが能率が上がりますか。